Die Bell-Ungleichungen
– Nichtlokalität und das Problem mit der Wahrscheinlichkeit –

Radin Dardashti
dardashti@uni-wuppertal.de
IZWT/Philosophisches Seminar
University of Wuppertal

8. Workshop der Heisenberg-Gesellschaft: Quantenphysik an der Schule

16. Juli 2022

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

IZWT Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschafts- und Technikforschung
www.izwt.de

twt
Graduiertenkolleg 2696
Transformationen von Wissenschaft und Technik seit 1800

EPISTEMOLOGY LHC

DFG

Motivation: von Neumann's No-go Theorem

- 1932 hat John von Neumann die Unvereinbarkeit der Quantenmechanik mit verborgenen Variablen bewiesen.
- Hermann (1935): "Eine eingehende Prüfung zeigt [...], daß diese mathematisch sonst einwandfreie Argumentation in ihren formalen Voraussetzungen eine der zu beweisenden These äquivalente Aussage ohne Begründung einführt"

Motivation: von Neumann's No-go Theorem

- Jauch and Piron (1963):
  "[t]he question concerning the existence of such hidden variables received an early and rather decisive answer in the form of von Neumann's proof on the mathematical impossibility of such variables in quantum theory"

- Bell (1966):
  "the formal proof of von Neumann does not justify his informal conclusion"
  und später in einem Interview
  "the von Neumann proof, if you actually come to grips with it falls apart in your hands! There is nothing to it. It's not just flawed, it's silly! [...] The proof of von Neumann is not merely false but foolish!"

Motivation: von Neumann's No-go Theorem

- Mermin (1993):
  "von Neumann's no-hidden variables proof was based on an assumption that can only be described as silly"
- Bub (2010):
  "Bell's analysis misconstrues the nature of von Neumann's claim, and von Neumann's argument actually establishes something important about hidden variables and quantum mechanics"
- Mermin & Schack (2018):
  "We disagree with recent papers claiming that Hermann and Bell failed to understand what von Neumann was actually doing."
- P. Acuna (2021):
  "Despite Mermin and Schack's response, Bub's and Dieks' reassessment is quite correct"

Unmöglichkeitstheoreme aus der Physik

- Von Neumann/Bell/Kochen-Specker Theorem
  - Bestimmte Theorien versteckter Variablen sind nicht möglich.
- Weinberg-Witten Theorem
  - Gravitonen können keine zusammengesetzte Teilchen sein.
- Nielsen-Ninomiya Theorem
  - Neutrinos können nicht auf Gittern simuliert werden.
- Haag/Hall-Wightmann Theorem
  - Wechselwirkungen können in der Relativistischen Quantenfeldtheorie nicht stattfinden.
- Coleman-Mandula Theorem
  - Interne und Externe Symmetrien können nur trivial miteinander kombiniert werden.

No-Go Theoreme spielen eine wichtige Rolle in der Entwicklung der Physik:

- Stoppen ganze Forschungsprogramme.
- Führen zu starken ontologischen Bekenntnissen.

Ziele:

1. Sollten Sie diese Rolle spielen?
2. Blick auf die Bell-Ungleichungen werfen aus wissenschaftsmethodologischer Perspektive.
3. Erarbeitung eines theoretischen Rahmens, der es uns erlaubt die historische Entwicklung solcher Abläufe zu verstehen.

Inhalt

Inhalt

Das Einstein-Podolsky-Rosen-Paradox (EPR)

MAY 15, 1935 PHYSICAL REVIEW VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)

Die EPR-Annahmen

Physikalische Realität (**R**)

“Wenn wir, ohne das System in irgendeiner Weise zu stören, mit Gewissheit (d.h., mit einer Wahrscheinlichkeit von 1) den Wert einer physikalischen Größe vorhersagen können, dann existiert ein physikalisch reales Element, welches dieser physikalischen Größe entspricht.”

Lokalität (**L**)

Zwei räumlich getrennte Systeme (im Sinne der speziellen Relativitätstheorie) haben keinen Einfluss aufeinander.

Vollständigkeit (**V**)

“Jedes Element der physikalischen Realität muß seine Entsprechung in der physikalischen Theorie haben.”

Das Einstein-Dilemma

Einstein-Podolsky-Rosen (1935):

- Ergebnis: Die Quantenmechanik ist unvollständig.
- Quantenformalismus, **L** und **R** $\Rightarrow \neg$**V**
- Quantenformalismus und **R** $\Rightarrow \neg$**V** oder $\neg$ **L**
  - $\Rightarrow$ **Das Einstein-Dilemma**

- Ansätze: Quantenmechanik vervollständigen
- Einige Möglichkeiten der Vervollständigung werden durch einige No-Go Theoremen ausgeschlossen!
  - Bell-Ungleichungen
  - Kochen-Specker Theorem
  - PBR-Theorem
  - ...

Eine Theorie versteckter Variablen (HVT)

- Plan: QM vervollständigen!
- Ausgangspunkt: QM ist empirisch adäquat! $\Rightarrow$ Jede Vervollständigung muss die QM Statistik wiedererlangen.
- Zwei Grundannahmen für HVTs:
  1. Es ist möglich, allen Observablen in allen Zuständen Werte zuzuordnen
  2. Die Statistik dieser zugeordneten Werte muss mit den Ergebnissen der "Standard"-QM übereinstimmen.
- Das Kochen-Specker Theorem stellt eine Herausforderung für 1. dar.
- Die Bell-Ungleichung stellt eine Herausforderung für 2. dar.

Eine Theorie versteckter Variablen (HVT)

- Bell's Idee: Modelliere eine Vervollständigung der QM, um Erkenntnisse über den entsprechenden Theorienraum zu erhalten.
- λ sei eine versteckte Variable definiert über die Menge aller versteckten Variablen Λ.
- Für jedes λ sind alle Werte für alle Operatoren (Observablen) bestimmt.
- Bezeichne mit $[A]^{|\psi\rangle}(\lambda)$ den Wert eines Operators A im Zustand $|\psi\rangle$, wenn die versteckte Variable den Wert λ hat.
- Für alle Zustände $|\psi\rangle$ existieren Wahrscheinlichkeitsdistributionen $\rho^{|\psi\rangle}(\lambda)$. Es gilt $\int_\Lambda \rho^{|\psi\rangle}(\lambda) d\lambda = 1$.
- Der Erwartungswert einer Observablen A ist gegeben durch

$$\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \int_\Lambda [A]^{|\psi\rangle}(\lambda) \rho^{|\psi\rangle}(\lambda) d\lambda$$

Experiment

- Eine Quelle erzeugt Elektronenpaare in einem Zustand $|\psi\rangle$.
- Zwei Spin-Messgeräte (S_L) und (S_R)
- Spin-Messung in zwei Richtungen:
  - S_L in den Richtungen l und l'
  - S_R in den Richtungen r und r'

Experiment

- x_l: Spin-Messung des S_L-Elektrons in l-Richtung ist "up".
- $\neg x_l$: Spin-Messung des S_L-Elektrons in l-Richtung ist "down".
- y_r: Spin-Messung des S_R-Elektrons in r-Richtung ist "up".
- $\neg y_r$: Spin-Messung des S_R-Elektrons in r-Richtung ist "down".
- Analog für l' und r'.

Notwendige Bedingungen für die Herleitung I

Existenz und Vorhersagbarkeit (Pred)

- Wahrscheinlichkeiten (für einzele und gemeinsame Ereignisse) existieren:

$$P_\lambda^L(x_l), P_\lambda^R(y_r), ...; P_\lambda^{LR}(x_l \wedge y_r), ...$$

- Vorhersagbarkeit (Übereinstimmung mit QM)

$$P_{|\psi\rangle}^{LR}(x_l \wedge y_r) = \int_\Lambda P_\lambda^{LR}(x_l \wedge y_r)\rho^{|\psi\rangle}(\lambda)d\lambda$$

Notwendige Bedingungen für die Herleitung II

λ-Unabhängigkeit (λ-Ind)

Der Wert der Variablen λ ist unabhängig von den QM-Observablen (hier die Richtung der Spin-Messung) die wir messen wollen.

$$\rho^{|\psi\rangle}(\lambda|l \wedge r) = \rho^{|\psi\rangle}(\lambda|l') = \rho^{|\psi\rangle}(\lambda|r) = \rho^{|\psi\rangle}(\lambda)$$

Faktorisierbarkeit (Fact)

Die Wahrscheinlichkeit der Messergebnisse in den zwei Messgeräten sind statistisch unabhängig.

$$P_\lambda^{LR}(x_l \wedge y_r) = P_\lambda^{L}(x_l) P_\lambda^{R}(y_r)$$

Herleitung

- Betrachte
$$-\gamma = \alpha\Big[\alpha'(1-\beta)+(1-\alpha')(1-\beta')\Big]+(1-\alpha)\Big[\alpha'\beta'+(1-\alpha')\beta\Big]$$
- $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in [0, 1]$
- $-\gamma$ liegt zwischen 0 und 1.
- Schreibe $\gamma = \alpha\beta + \alpha'\beta + \alpha\beta' - \alpha'\beta' - \alpha - \beta$
- D.h. $-1 \leq \gamma \leq 0$
- Setze $\alpha = P^L_\lambda(x_l), \beta = P^R_\lambda(y_r), \alpha' = P^L_\lambda(x_{l'}), \beta' = P^R_\lambda(y_{r'})$

Herleitung

- $\gamma(\lambda) = P^L_\lambda(x_l)P^R_\lambda(y_r) + P^L_\lambda(x_{l'})P^R_\lambda(y_r) + P^L_\lambda(x_l)P^R_\lambda(y_{r'}) - P^L_\lambda(x_{l'})P^R_\lambda(y_{r'}) - P^L_\lambda(x_l) - P^R_\lambda(y_r)$
- Mit (Fact) folgt:
  $\gamma(\lambda) = P^{LR}_\lambda(x_l \wedge y_r) + P^{LR}_\lambda(x_{l'} \wedge y_r) + P^{LR}_\lambda(x_l \wedge y_{r'}) - P^{LR}_\lambda(x_{l'} \wedge y_{r'}) - P^L_\lambda(x_l) - P^R_\lambda(y_r)$
- Mit (Pred), (λ-Ind) und $\int_\Lambda \rho^{|\psi\rangle}(\lambda)d\lambda = 1$ folgt:
- $-1 \cdot \int_\Lambda \rho^{|\psi\rangle}(\lambda)d\lambda \quad \leq \quad \int_\Lambda \gamma(\lambda)\rho^{|\psi\rangle}(\lambda)d\lambda \quad \leq \quad 0 \cdot \int_\Lambda \rho^{|\psi\rangle}(\lambda)d\lambda$

Bellsche Ungleichung (Clauser-Horne Version) (CHU):

$$-1 \quad \leq \quad P^{LR}_{|\psi\rangle}(x_l \wedge y_r) + P^{LR}_{|\psi\rangle}(x_{l'} \wedge y_r) + P^{LR}_{|\psi\rangle}(x_l \wedge y_{r'}) - P^{LR}_{|\psi\rangle}(x_{l'} \wedge y_{r'}) - P^L_{|\psi\rangle}(x_l) - P^R_{|\psi\rangle}(y_r) \quad \leq \quad 0$$

Quantenmechanik und Experimente widersprechen der Bell-Ungleichung

Was ist das Problem?

- Problem 1: Quantenmechanik:
  - Setze e.g. $\theta_{l'r} = 60^\circ$ $\theta_{lr} = 0^\circ$, $\theta_{lr'} = 60^\circ$ and $\theta_{l'r'} = 120^\circ$
  - Elektronenpaar in Singlet-Zustand: $P^{LR}_{|\psi\rangle_{Singlet}}(x_l \wedge y_r) = sin^2(\frac{1}{2}\theta_{lr})$
  - (CHU): $-1 \leq 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq -\frac{5}{4} \leq 0$
- Problem 2: Experimente
  - Experimente: Experimentelle Beobachtungen widersprechen der Ungleichung (Aspect et al.'s experiments)
- Widerspruch zwischen HVT und QM Statistik.

(Pred)$\wedge$(Fact)$\wedge$(λ-Ind) $\rightarrow$ (CHU)
$\Rightarrow \neg$(CHU) $\rightarrow \neg$(Pred)$\vee$ $\neg$(Fact)$\vee$ $\neg$(λ-Ind)

Bell Ungleichungen (Pitowsky Style)

- Betrachte eine Urne mit N Bällen verschiedener Farbe und Zusammensetzung
- $p_1 =$ Anzahl roter Bälle$/N$
- $p_2 =$ Anzahl hölzerner Bälle$/N$
- $p_{12} =$ Anzahl roter hölzerner Bälle$/N$

$$0 \leq p_{12} \leq p_1 \leq 1 \qquad 0 \leq p_{12} \leq p_2 \leq 1 \tag{1}$$

Stellen p_1, p_2 und p_{12} Wahrscheinlichkeiten dar, wenn (1) gilt? Nein!

$p_1 = 0,73$, $p_2 = 0,62$ und $p_{12} = 0,31$ erfüllen (1). Aber die Wahrscheinlichkeit, entweder eine rote oder eine hölzerne Kugel zu erhalten, ist dann: $p_1 + p_2 - p_{12} = 0,73 + 0,62 - 0,31 = 1,04$.

Man kann zeigen, dass p_1, p_2 and p_{12} Wahrscheinlichkeiten darstellen, wenn (1) und (2) gelten:

$$p_1 + p_2 - p_{12} \leq 1 \tag{2}$$

Bell-artige Ungleichungen (Pitowsky Style)

- Theorem: $p_1, p_2, p_3, p_4, p_{13}, p_{14}, p_{23}$ and p_{24} sind Kolmogorov-Wahrscheinlichkeiten gdw. die folgenden Ungleichungen gelten (Pitowsky (1989), p.28):
  1. $0 \leq p_{ij} \leq p_i \leq 1 \qquad 0 \leq p_{ij} \leq p_j \leq 1 \qquad i = 1,2 \quad j = 3,4$
  2. $p_i + p_j - p_{ij} \leq 1 \qquad i = 1,2 \quad j = 3,4$
  3. $-1 \leq p_{13} + p_{14} + p_{24} - p_{23} - p_1 - p_4 \leq 0$
  4. $-1 \leq p_{23} + p_{24} + p_{14} - p_{13} - p_2 - p_4 \leq 0$
  5. $-1 \leq p_{14} + p_{13} + p_{23} - p_{24} - p_1 - p_3 \leq 0$
  6. $-1 \leq p_{24} + p_{23} + p_{13} - p_{14} - p_2 - p_3 \leq 0$

Bell-artige Ungleichungen (Pitowsky Style)

- Theorem: $p_1, p_2, p_3, p_4, p_{13}, p_{14}, p_{23}$ and p_{24} sind Kolmogorov-Wahrscheinlichkeiten gdw. die folgenden Ungleichungen gelten (Pitowsky (1989), p.28):
  1. $0 \leq p_{ij} \leq p_i \leq 1 \qquad 0 \leq p_{ij} \leq p_j \leq 1 \qquad i = 1, 2 \quad j = 3, 4$
  2. $p_i + p_j - p_{ij} \leq 1 \qquad i = 1, 2 \quad j = 3, 4$
  3. $-1 \leq p_{13} + p_{14} + p_{24} - p_{23} - p_1 - p_4 \leq 0$
  4. $-1 \leq p_{23} + p_{24} + p_{14} - p_{13} - p_2 - p_4 \leq 0$
  5. $-1 \leq p_{14} + p_{13} + p_{23} - p_{24} - p_1 - p_3 \leq 0$
  6. $-1 \leq p_{24} + p_{23} + p_{13} - p_{14} - p_2 - p_3 \leq 0$
- 5. entspricht der Bell Ungleichung in der Clauser-Horne Version.

$\Rightarrow$ Bestimmte Wahrscheinlichkeiten in der QM sind keine klassischen Wahrscheinlichkeiten.

Inhalt

Die Elemente eines No-Go Theorems

- Das erste Element eines No-Go Theorems ist ein Ziel G
- Das Ziel G wird innerhalb eines Rahmens F formuliert
  - Math.-Rahmen (z.B. Pitowsky)
  - Theo.-Rahmen (z.B. Coleman/Mandula)
  - Modell-Rahmen (z.B. Bell Ungleichungen)
- Physikalische Annahmen P (z. B. Lokalität) werden durch mathematische Strukturen M (z. B. Kolmogorovsche Wahrscheinlichkeiten, etc.) ausgedrückt.

Definition

Ein No-Go Theorem ist eine Inkonsistenz zwischen den folgenden Elementen:

- einer abgeleiteten Konsequenz einer Menge physikalischer Annahmen P dargestellt durch mathematische Strukturen M innerhalb eines Rahmens F,
- und eines Ziels G oder einer Menge physikalischer Hintergrundsannahmen B.

Wir bezeichnen ein No-Go Theorem mit $\langle P, M, F \lightning G, B \rangle$.

Theoreme als Widersprüche

No-Go Theoreme sind demnach Widersprüche, d.h. sie implizieren die Negation mindestens einer ihrer Prämissen.

$$\langle P, M, F \lightning G, B \rangle \Rightarrow \neg G \vee \neg P \vee \neg B \vee \neg F \vee \neg M$$

$\langle P, M, F \lightning G, B \rangle \Rightarrow \neg G$

- Das Resultat des Theorems zeigt die Unmöglichkeit von G
- Nicht überraschend, da G noch nicht erreicht wurde, während die anderen Elemente als wesentliche Bestandteile einer gut bestätigten Theorie wahrgenommen werden.
- Was motiviert G?
  - Metaphysisch motiviert
  - Meta-Induktiv motiviert
  - Empirisch motiviert
  - Pragmatisch motiviert
  - ...
- Ein und dasselbe G kann von unterschiedlichen Wissenschaftler*innen unterschiedlich motiviert sein.
- D.h. man zieht unterschiedliche Konsequenzen bzgl. G desselben Theorems.

$\langle P, M, F \lightning G, B \rangle \Rightarrow \neg G$

Beispiel: Bell-artige Theoreme

- Laudisa (2014): "the search for negative results [...] seems to hide the implicit tendency to avoid or postpone the really hard job"
- Diese wären nach ihm: "specify[ing] the ontology that quantum theory is supposed to be about"
- Andere betrachten als Ziel dieser Theoreme jedoch die Analyse möglicher wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlagen für die Quantenmechanik (Fine (1982), Suppes/Zanotti (1991), Feintzeig and Fletcher (2014))
- Die Motivation eines Zieles G bestimmt zum Teil die möglichen Interpretationen eines Theorems

$\langle P, M, F \lightning G, B \rangle \Rightarrow \neg P \vee \neg B$

Ein No-Go Theorem welches nicht auf die Unmöglichkeit von G verweist, wird häufig als Argument gegen eines der Elemente aus P verstanden.

- Physikalische Annahmen hängen zusammen mit
  - dem Ziel G
  - den theoretischen Prinzipien (Energieerhaltung, Lorentz-Invarianz)
  - den metaphysischen Prinzipien (Realitäts-Kriterium bei EPR)
  - den Elementen, die nur eingeführt werden, um das Resultat herleiten zu können (z.B. Colemans Analytizitätsannahme)
- Die Rechtfertigungen und Meinungen bzgl. der jeweiligen Annahmen kann sehr stark variieren.
- Großteil der Arbeit der Philosophen der Physik.
- Beispiel: Coleman/Mandula behaupten zur Analytizitätsannahme "it is something that most physicists believe to be a property of the real world"

$\langle P, M, F \lightning G, B \rangle \Rightarrow \neg F$

- Ein No-Go Theorem kann innerhalb unterschiedlicher Rahmen formuliert werden
  - Math.-Rahmen
  - Theo.-Rahmen
  - Modell-Rahmen
- Beispiel: Theorien verborgener Parameter
  - Bell, CHSH, ... (Modell-Rahmen)
  - Pitowsky (Math.-Rahmen)
- Der Rahmen F hat (häufig) keine Rolle bei der Beurteilung von Theoremen gespielt ($\neg F$?).
- Es bietet jedoch eine nützliche strategische Option

$\langle P, M, F \lightning G, B \rangle \Rightarrow \neg M$

- Man benutzt eine mathematische Struktur, um die gegebene physikalische Situation zu beschreiben.
- Das bleibt größtenteils implizit, weil man sich auf Strukturen bezieht die sich in der Praxis durchgesetzt haben.
- Z.B. Symmetrien werden durch Lie-Gruppen dargestellt und Wahrscheinlichkeiten erfüllen die Kolmogorov-Axiome.
- $\neg M$ wird selten als eine Option angesehen.
- Was bedeutet $\neg M$?

Beispiel: Bell-artige Ungleichungen (Pitowsky Style)

- $\neg M$-Route: Quanten-Wahrscheinlichkeiten widersprechen der Ungleichung $\rightarrow$ einer der Axiome der Kolmogorovschen Wahrscheinlichkeiten wurde verletzt.

Kolmogorov Axiome

Ein klassischer Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel (X, Σ, p), X ist eine nicht-leere Menge von Ergebnissen, Σ ist eine (σ-)Algebra von Teilmengen von X, und $p : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine reele Funktion, sodass:

1. $p(X) = 1$
2. $p(A) \geq 0$
3. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Beispiel: Bell-artige Ungleichungen (Pitowsky Style)

- Mögliche strategische Optionen:
  - Die Algebra ändern $\rightarrow$ e.g. Verallgemeinerte Wahrscheinlichkeitsräume (Fine 1982, Feintzeig 2013)
  - Positivität aufgeben $\rightarrow$ negative Wahrscheinlichkeiten (Acacio de Barros et al. 2018)
  - Additivität aufgeben $\rightarrow$ z.B. ungenaue Wahrscheinlichkeiten (Suppes & Zanotti 1991)

Inhalt

Fazit

- 1. Theoreme in der Physik sind kompliziert!
- 2. Theoreme sind nicht ausgestattet mit ordinalen Präferenzzuordnungen
  - Die Bedeutung eines Theorems hängt von den Wünschen, Prioritäten und Präferenzen der Wissenschaftler*innen ab.

Fazit

- 3. Ein Theorem hat keine eindeutige Implikation.

- 4. No-Go Theoreme sollten (zu Anfang) am besten als Go-Theoreme verstanden werden.

  - Theoreme sind fantastische methodologische Werkzeuge der Theorienentwicklung, jedoch häufig unverlässliche Werkzeuge, um Forschungsprogramme zu stoppen.

"Impossible is not a fact. It's an opinion. Impossible is potential. Impossible is temporary. Impossible is nothing." -Muhammad Ali

Thanks

Acuna, P. (2021). von Neumann,Äôs theorem revisited. Foundations of Physics, 51(3), 1-29.

Bell, J. S. (1966). On the problem of hidden variables in quantum mechanics. Reviews of Modern physics, 38(3), 447.

Bub, Jeffrey (2010). ‘Von Neumann’s No Hidden Variables Proof: a Re-appraisal’. In: Foundations of Physics 40.9-10, pp. 1333-1340.

S. Coleman and J. Mandula (1967). All possible symmetries of the S matrix. Physical Review, 159(5):1251 .

Dardashti, R. (2021). No-go theorems: What are they good for?. Studies in History and Philosophy of Science Part A, 86, 47-55.

Feintzeig, B. H., & Fletcher, S. C. (2017). On noncontextual, non-Kolmogorovian hidden variable theories. Foundations of Physics, 47(2), 294-315.

Fine, A. (1982). Hidden variables, joint probability, and the Bell inequalities. Physical Review Letters, 48(5), 291.

Hermann, G. (1935). Die naturphilosophischen grundlagen der quantenmechanik. Naturwissenschaften, 23(42), 718-721.

Jauch, Josef Maria and Constantin Piron. ‘Can Hidden Variables be Excluded in Quantum Mechanics’. In: Helv. Phys. Acta 36, pp. 827-837 (1963).

Laudisa, Federico. ‘Against the ‘No-go’ Philosophy of Quantum Mechanics’. In: European Journal for Philosophy of Science 4.1, pp. 1-17 (2014).

Mermin, N. D. (1993). Hidden variables and the two theorems of John Bell. Reviews of Modern Physics, 65(3), 803.

Mermin, N. D., & Schack, R. (2018). Homer nodded: von Neumann,Äôs surprising oversight. Foundations of Physics, 48(9), 1007-1020.

Pitowsky, I. (1989). Quantum probability-quantum logic (Vol. 321). Berlin: Springer-Verlag.

Suppes, Patrick and Mario Zanotti. 'Existence of Hidden Variables Having Only Upper Probabilities'. In: Foundations of Physics 21.12, pp. 1479-1499 (1991).

Von Neumann, J. (2013). Mathematische grundlagen der quantenmechanik (Vol. 38). Springer-Verlag.