Quantenphysik in den Sternen

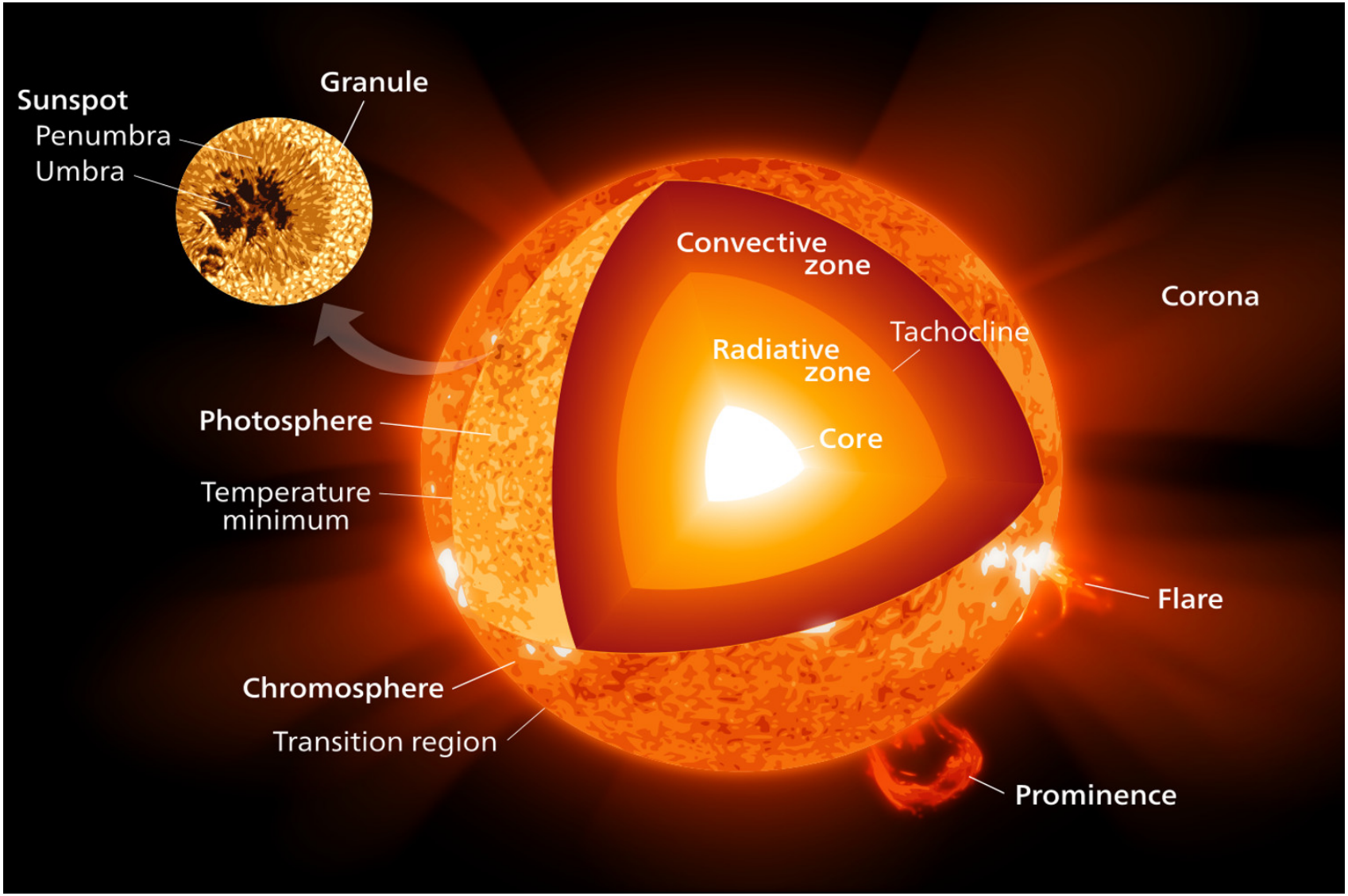
Matthias Bartelmann

Universität Heidelberg, Institut für Theoretische Astrophysik

Woher bezieht die Sonne ihre Energie?

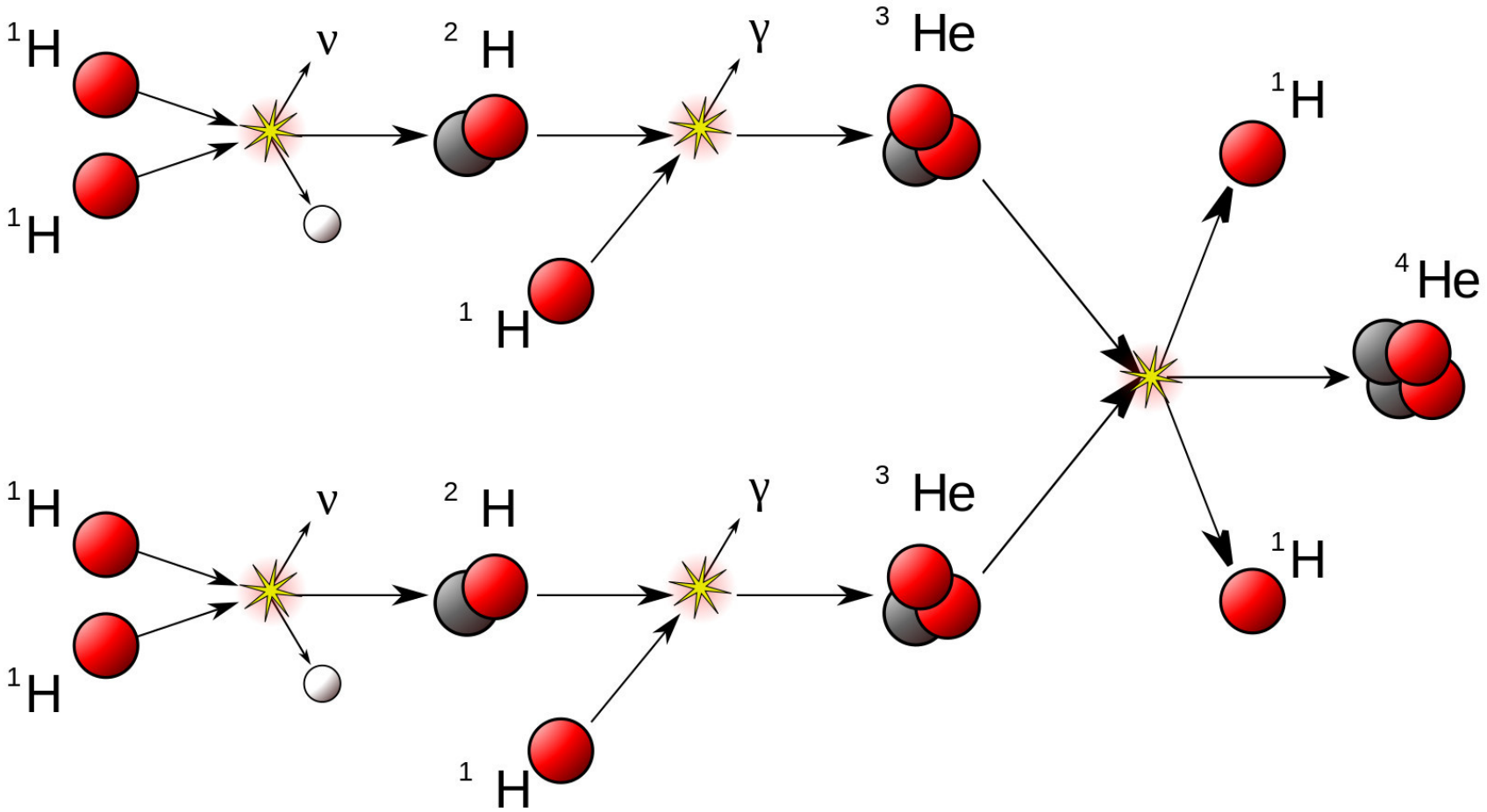
(Wikipedia)

Woher bezieht die Sonne ihre Energie?



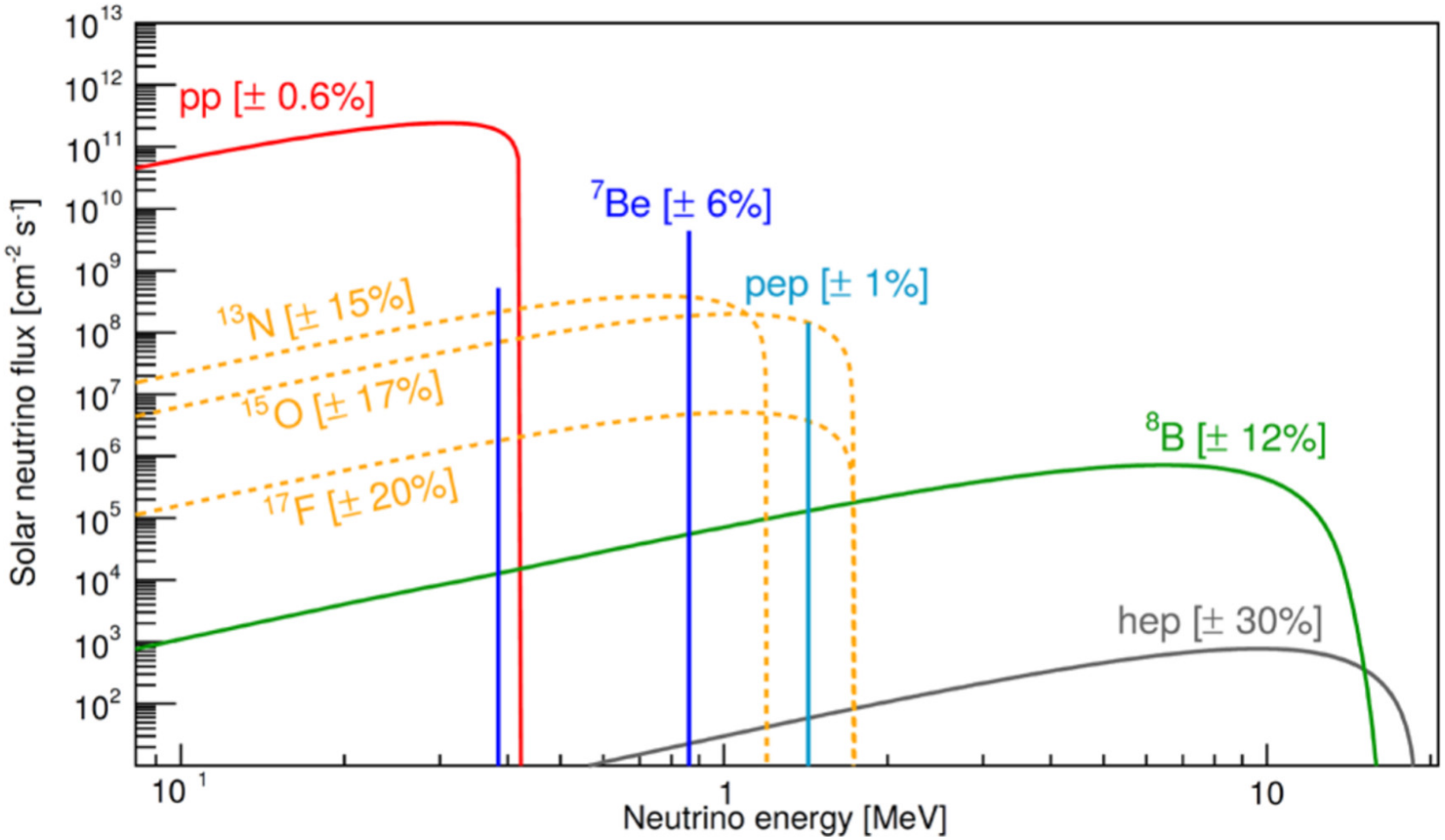
(Wikipedia)

Woher bezieht die Sonne ihre Energie?



(Wikipedia)

Woher bezieht die Sonne ihre Energie?



(A. Pocar)

Woher bezieht die Sonne ihre Energie?

Wie und unter welchen Bedingungen ist Wasserstoff-Fusion möglich?

Ein einfaches Sonnenmodell

- hydrostatisches Gleichgewicht:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\rho\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = -\rho\frac{GM(r)}{r^2}$$

- polytrope Schichtung:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

Ein einfaches Sonnenmodell

- führt auf die Lane-Emden-Gleichung:

$$\theta'' + \frac{2}{x}\theta' + \theta^n = 0$$

- dabei sind:

$$x = \frac{r}{r_0}\,, \quad \theta' = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\,, \quad \theta^n = \frac{\rho}{\rho_0}\,, \quad n = \frac{1}{\gamma - 1}$$

- die radiale Skala ist:

$$r_0 = \sqrt{\frac{(1+n)P_0}{4\pi G \rho_0^2}}$$

Ein einfaches Sonnenmodell

- Randbedingungen:

$$\theta\Big|_{x=0} = 1\ , \quad \theta'\Big|_{x=0} = 0$$

- Lösung für $n = 1$:

$$\theta = \frac{\sin x}{x}$$

kleinste Nullstelle bei $x_* = \pi$, Sternradius $R = x_* r_0$, zentrale Dichte ρ_0 aus

$$M = 4\pi\rho_0 r_0^3 \int_0^{x_*} \theta^n\, x^2 \mathrm{d}x = 4\pi^2 \rho_0 r_0^3$$

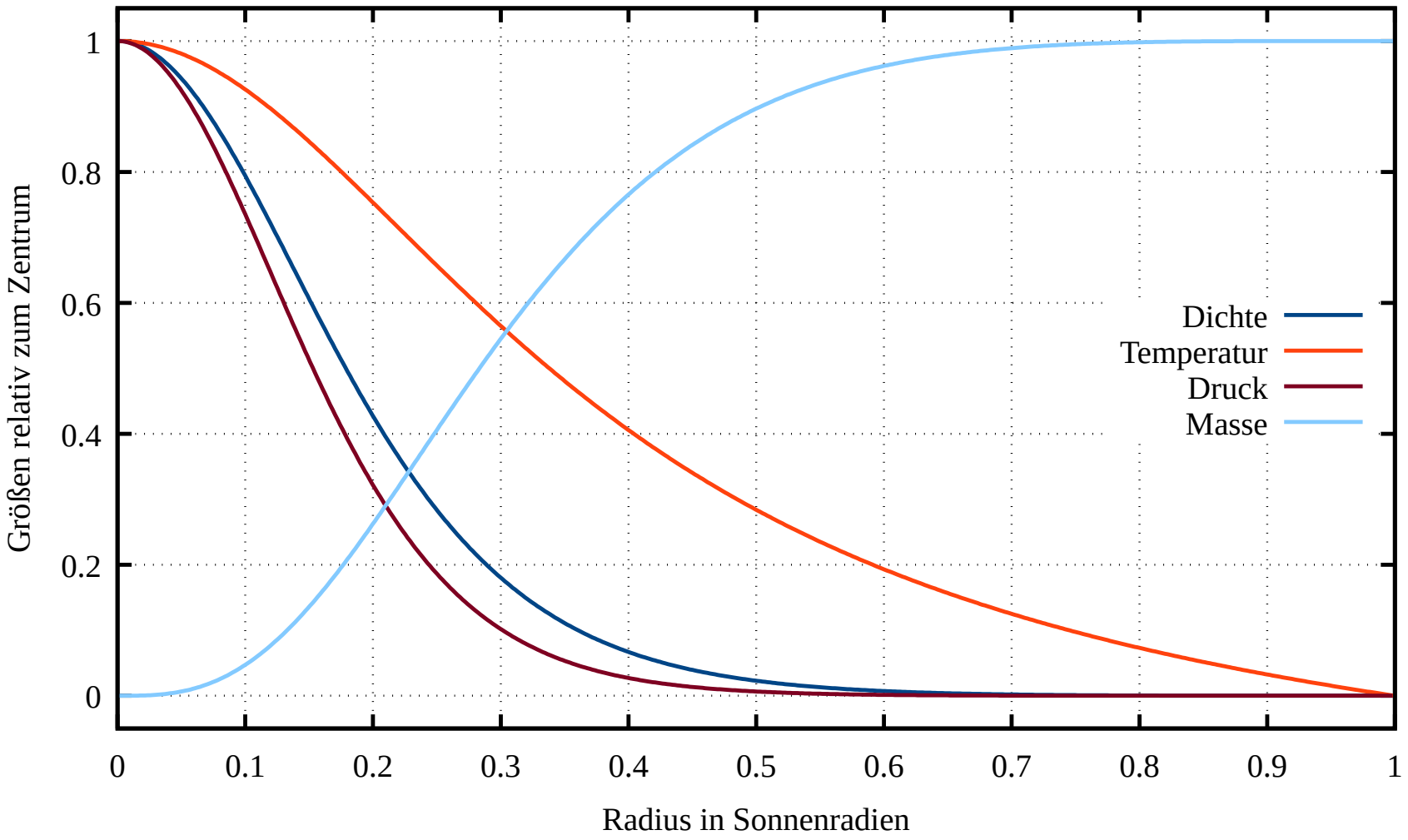
Ein einfaches Sonnenmodell

- Randbedingungen:

$$\theta\Big|_{x=0} = 1 \ , \quad \theta'\Big|_{x=0} = 0$$

- Annahme: $n = 3$ ($\gamma = 4/3$)
- Normierung durch Radius und Masse der Sonne

Numerische Lösung



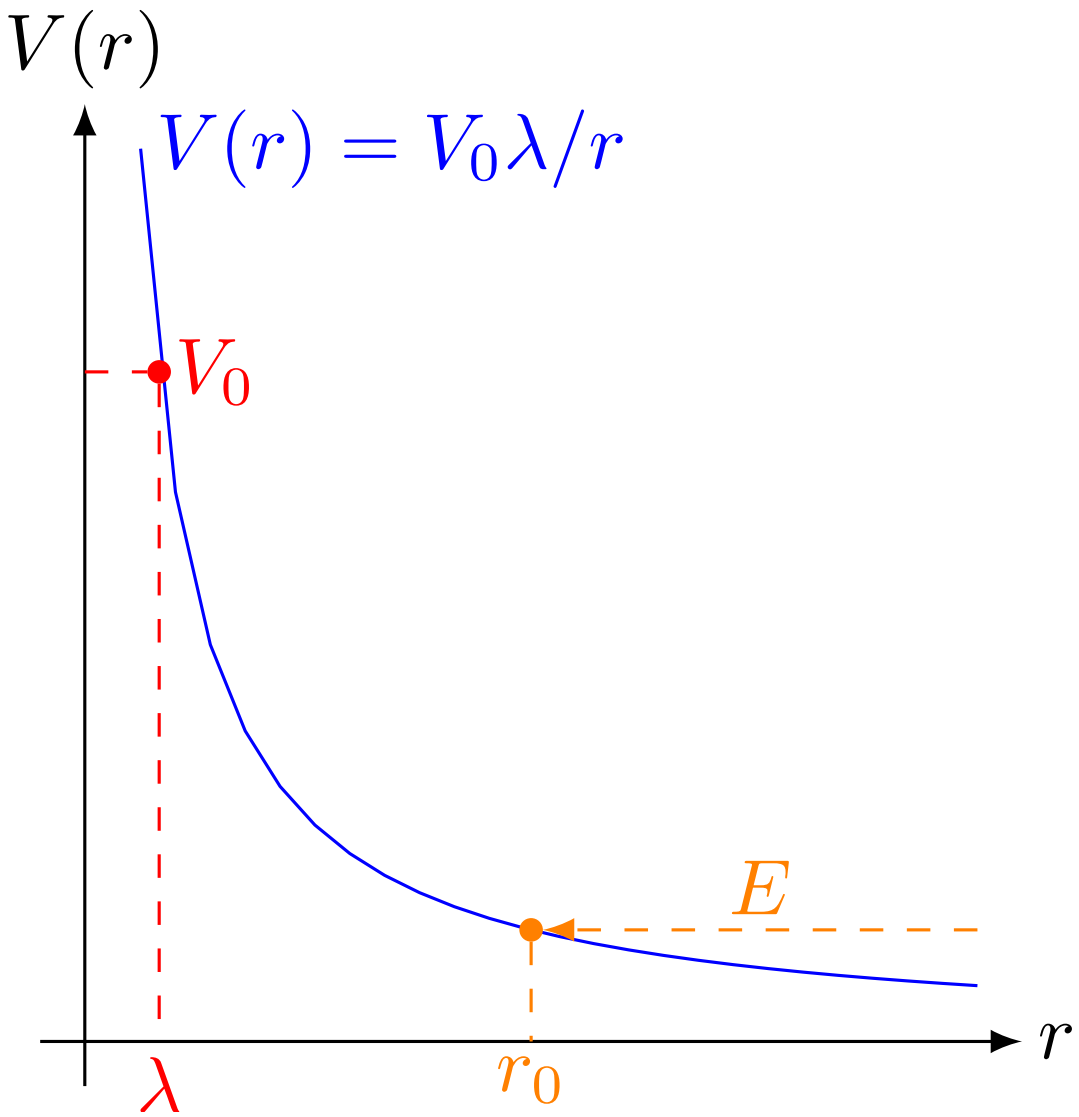
Numerische Lösung

zentrale Dichte	ρ_0	$76.31\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$
zentraler Druck	P_0	$1.24 \cdot 10^{17}\,\mathrm{erg\,cm^{-3}}$
zentrale thermische Energie	$k_\mathrm{B} T_0$	$1.7\,\mathrm{keV}$
zentrale Temperatur	T_0	$1.97 \cdot 10^{7}\,\mathrm{K}$

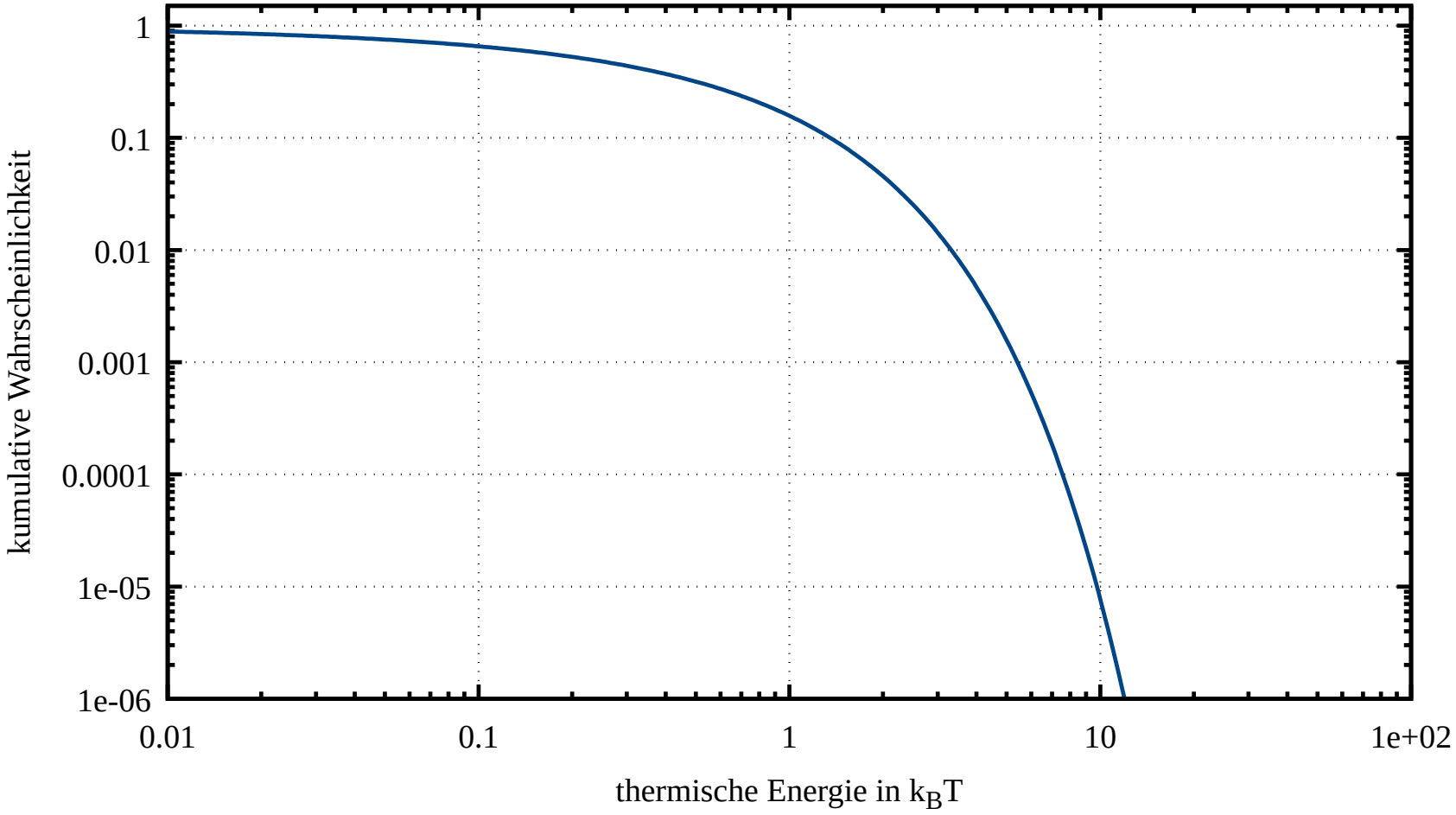
Energieschwelle

- Kernfusion setzt ein, sobald die starke Wechselwirkung stärker als die Coulomb-Abstoßung wird.
- Der Abstand zwischen den Protonen muss dafür $\leq \lambda = 2 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm}$ werden.
- Die Potentialschwelle ist dort $V_0 = 720\,\mathrm{keV} = 420\,k_\mathrm{B}T$ hoch.

Energieschwelle



Energieverteilung (Boltzmann-Verteilung)



Energieverteilung (Boltzmann-Verteilung)

- Thermische Energien von $420\,k_\mathrm{B}T$ kommen schlicht nicht vor.
- Schlussfolgerung:
  Kernfusion in der Sonne ist unmöglich.

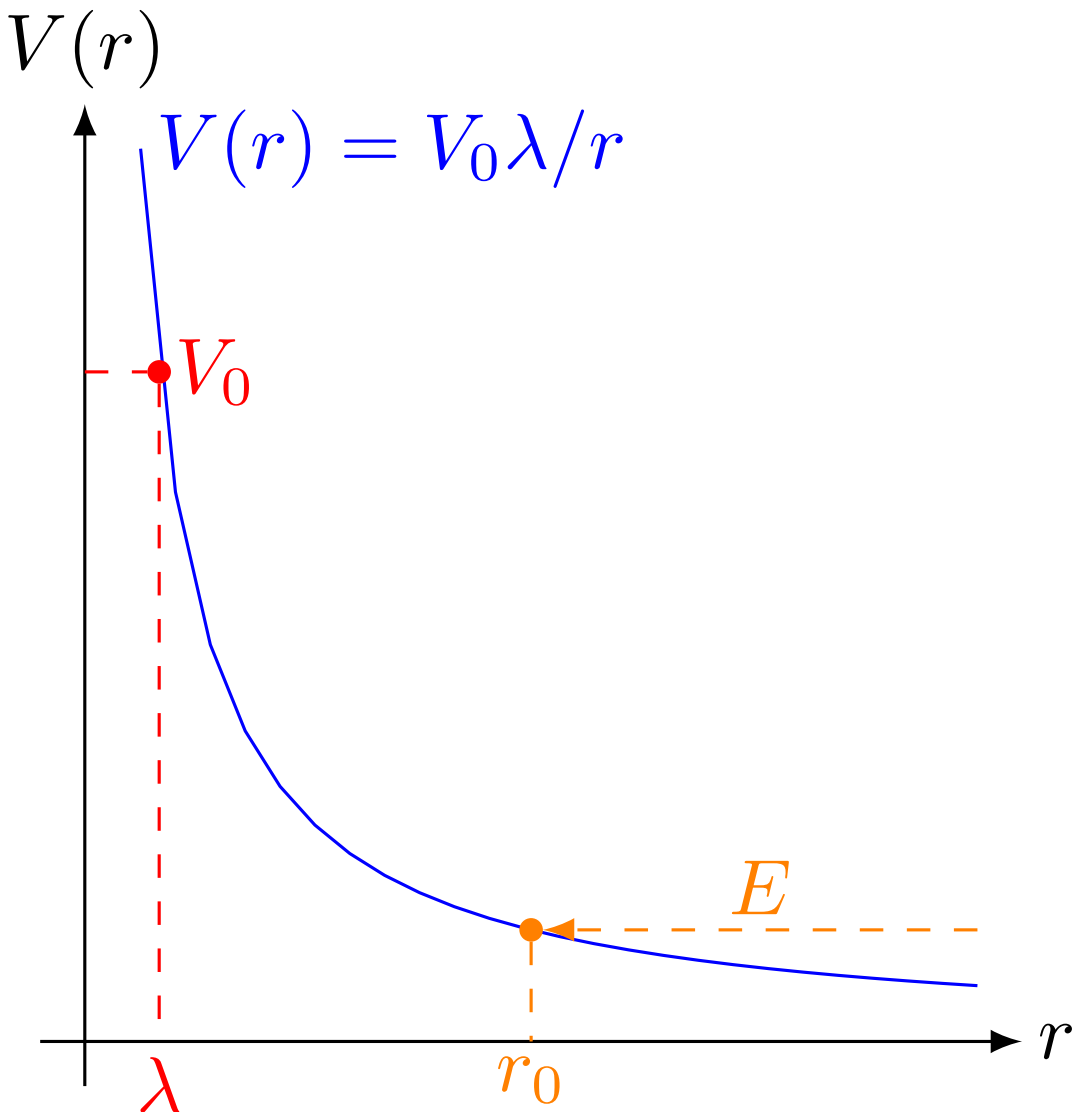
Energieverteilung (Boltzmann-Verteilung)

- Thermische Energien von $420\,k_\mathrm{B}T$ kommen schlicht nicht vor.
- Schlussfolgerung:
  Kernfusion in der Sonne ist klassisch unmöglich.

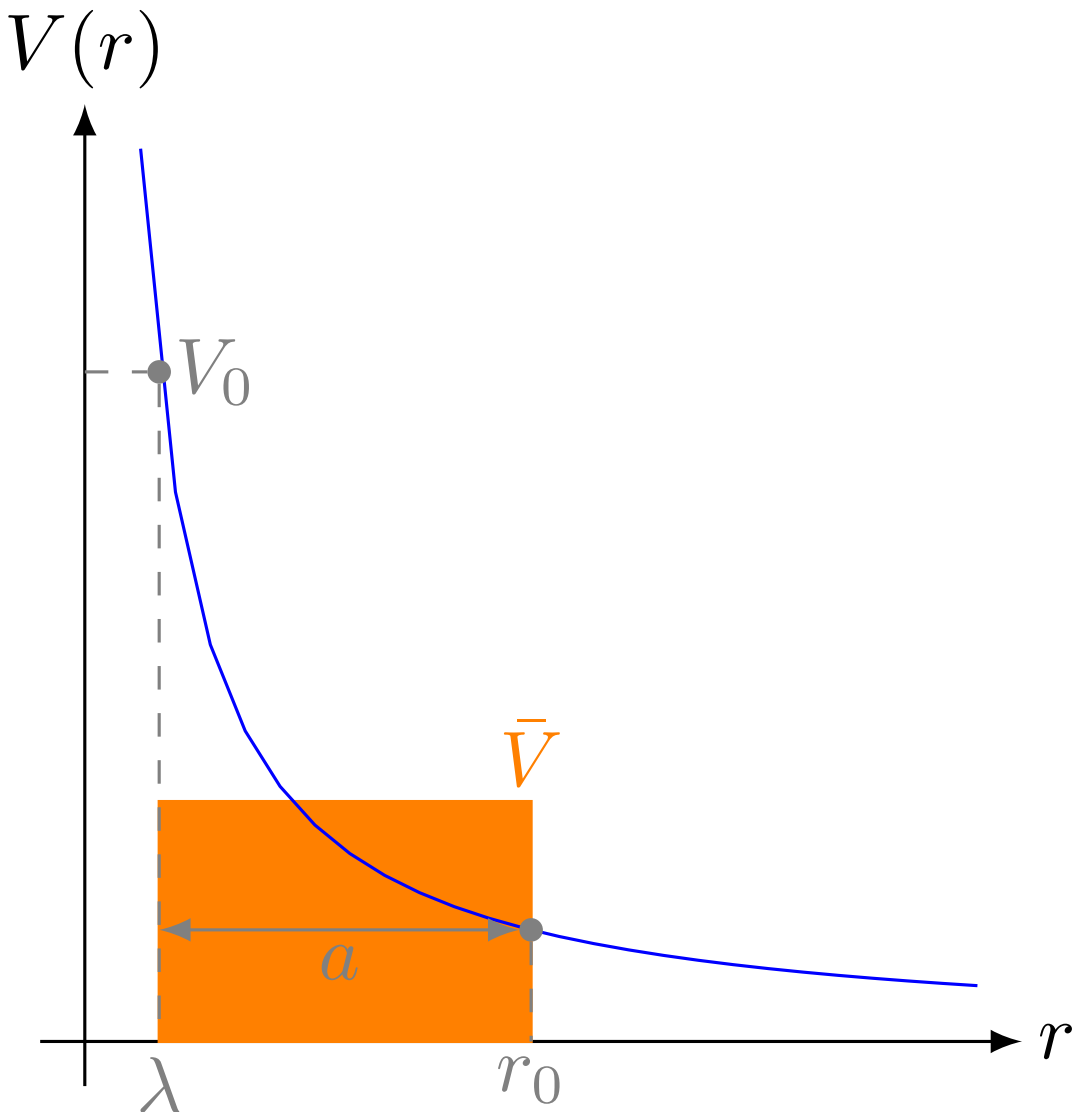
Energieverteilung (Boltzmann-Verteilung)

- Thermische Energien von $420\,k_\mathrm{B}T$ kommen schlicht nicht vor.
- Schlussfolgerung:
  Kernfusion in der Sonne ist klassisch unmöglich.
- Möglich wird sie allein durch den Tunneleffekt.

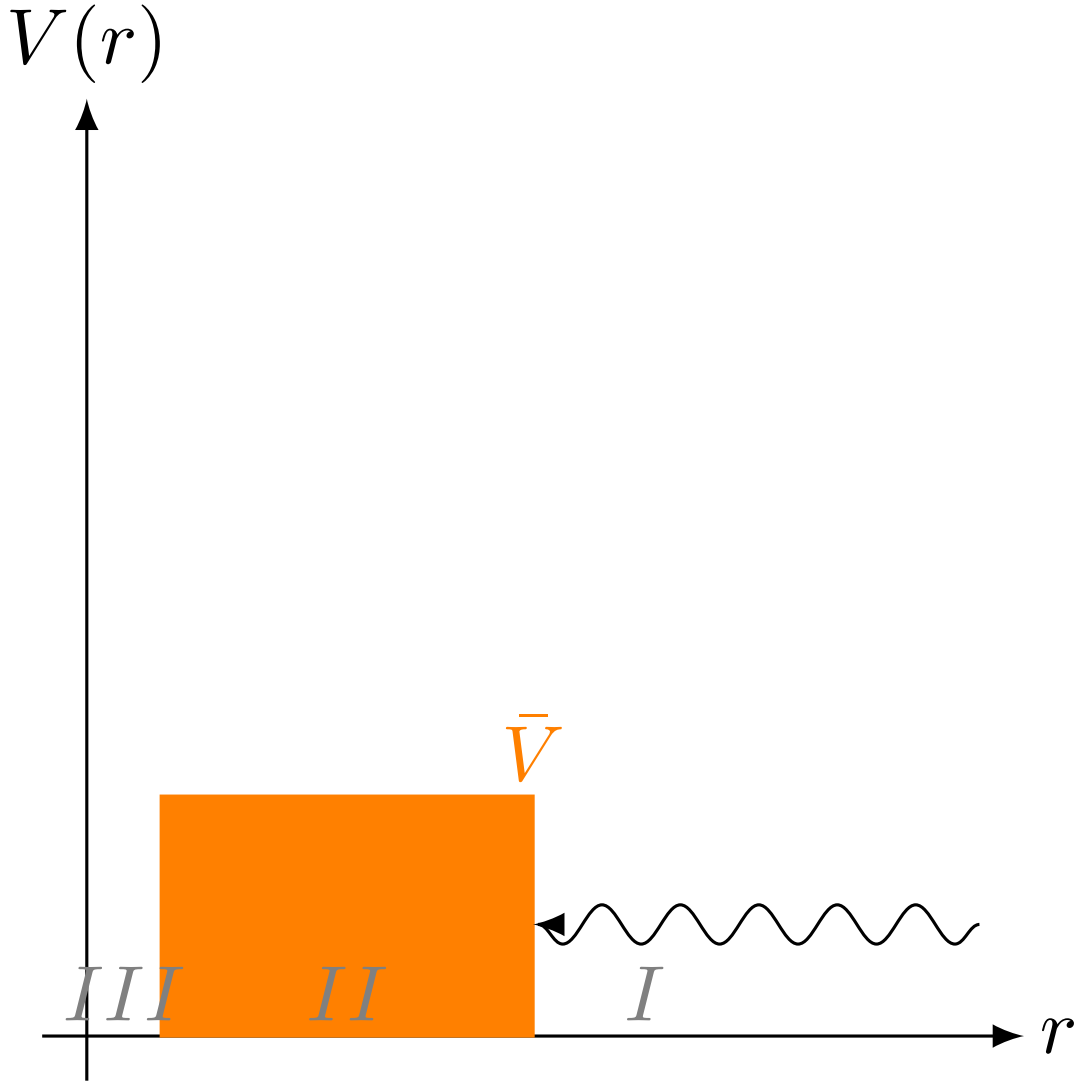
Tunneleffekt im eindimensionalen Fall



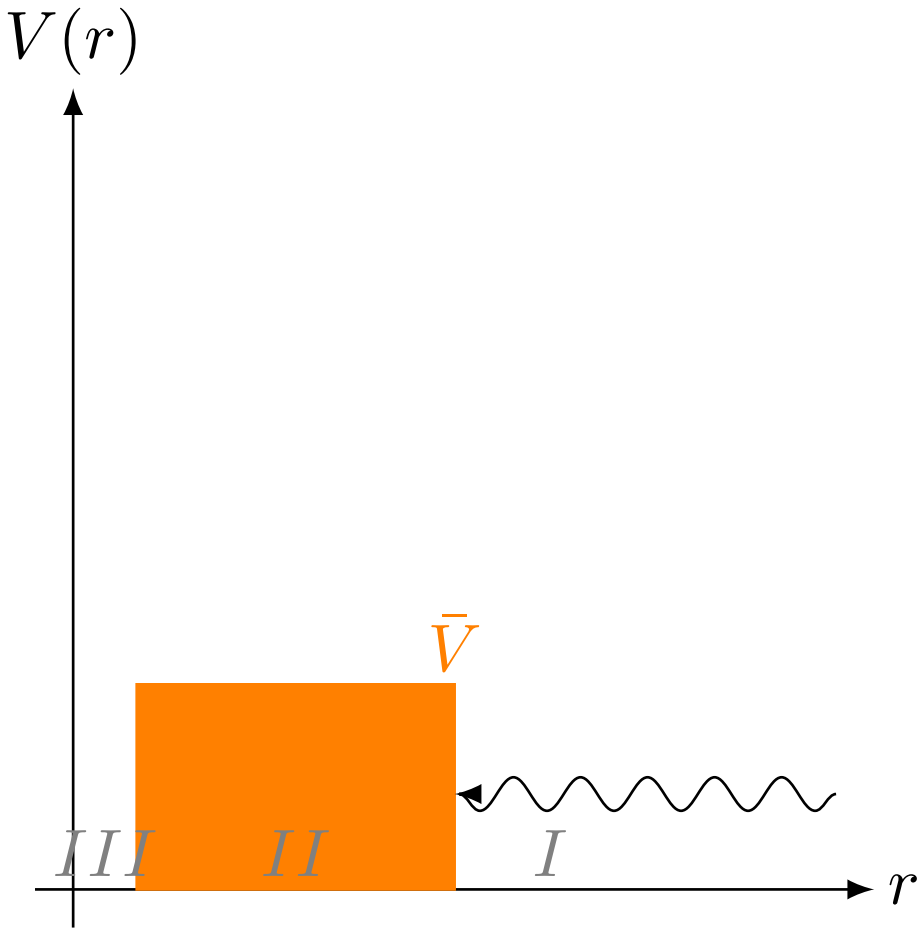
Tunneleffekt im eindimensionalen Fall



Tunneleffekt im eindimensionalen Fall



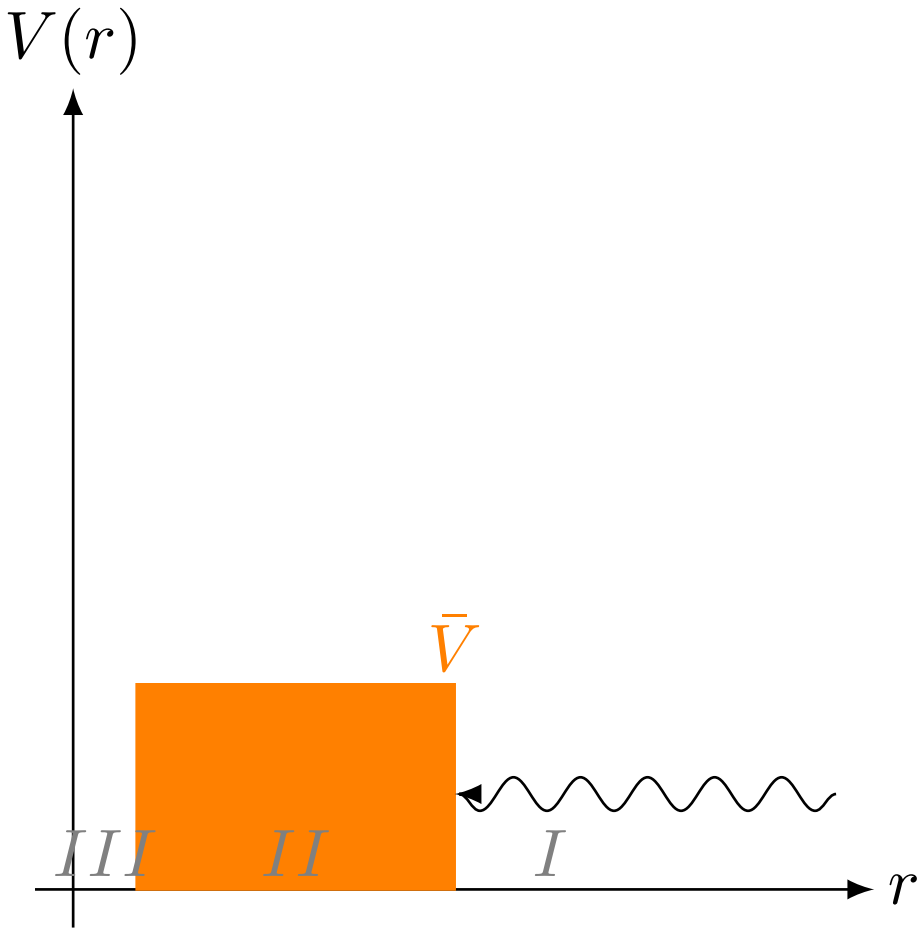
Tunneleffekt im eindimensionalen Fall



- Schrödinger-Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi$$

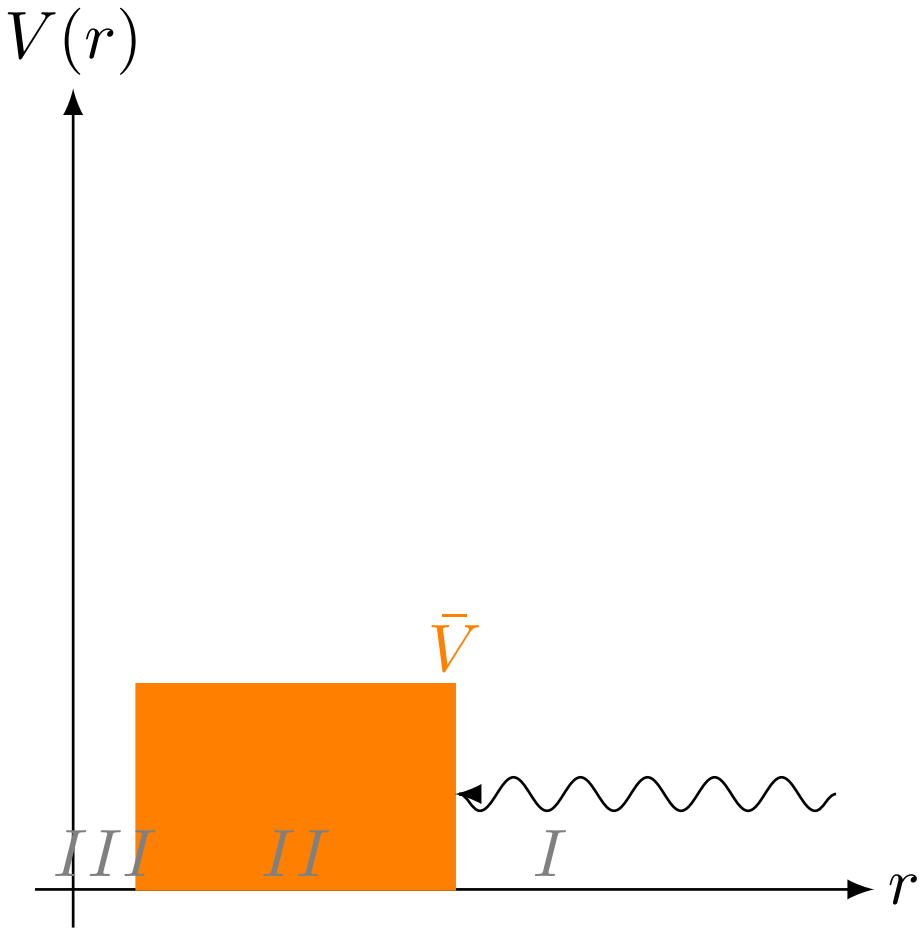
Tunneleffekt im eindimensionalen Fall



- Schrödinger-Gleichung:

$$\psi'' + \frac{2m(E-V)}{\hbar^2}\psi = 0$$

Tunneleffekt im eindimensionalen Fall

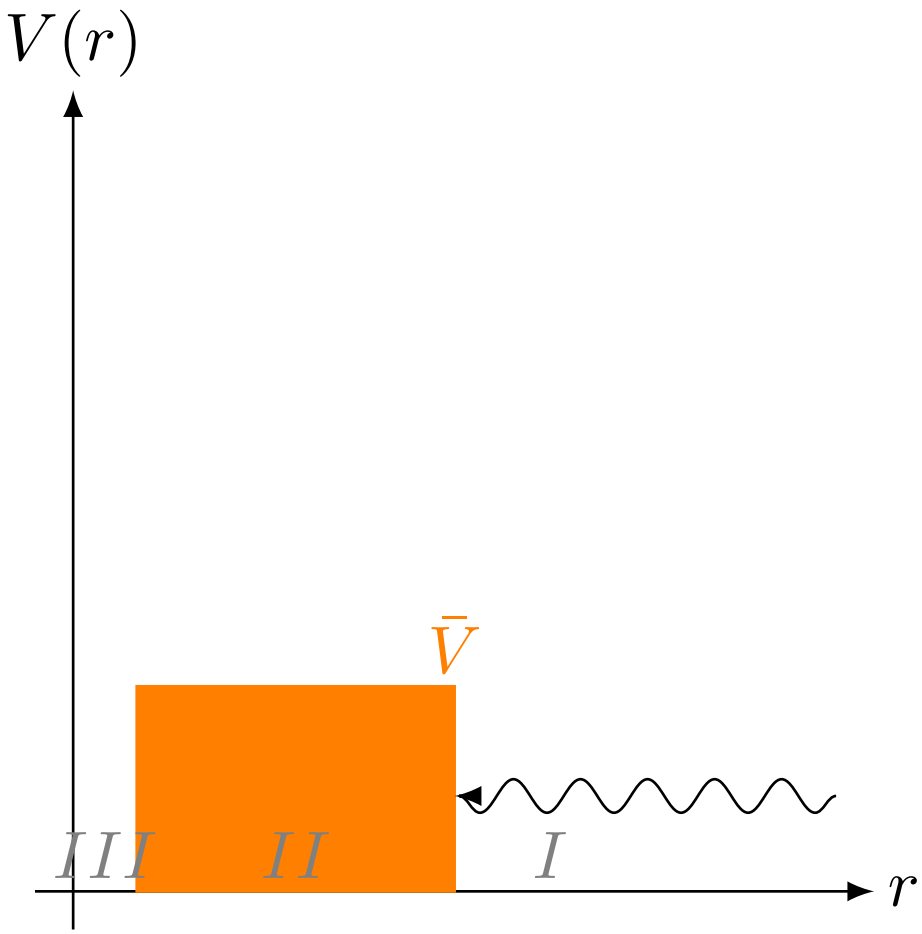


- Schrödinger-Gleichung:

$$\psi'' - k^2\psi = 0 \,,$$

$$k^2 = \frac{2m(V-E)}{\hbar^2}$$

Tunneleffekt im eindimensionalen Fall



- Schrödinger-Gleichung:

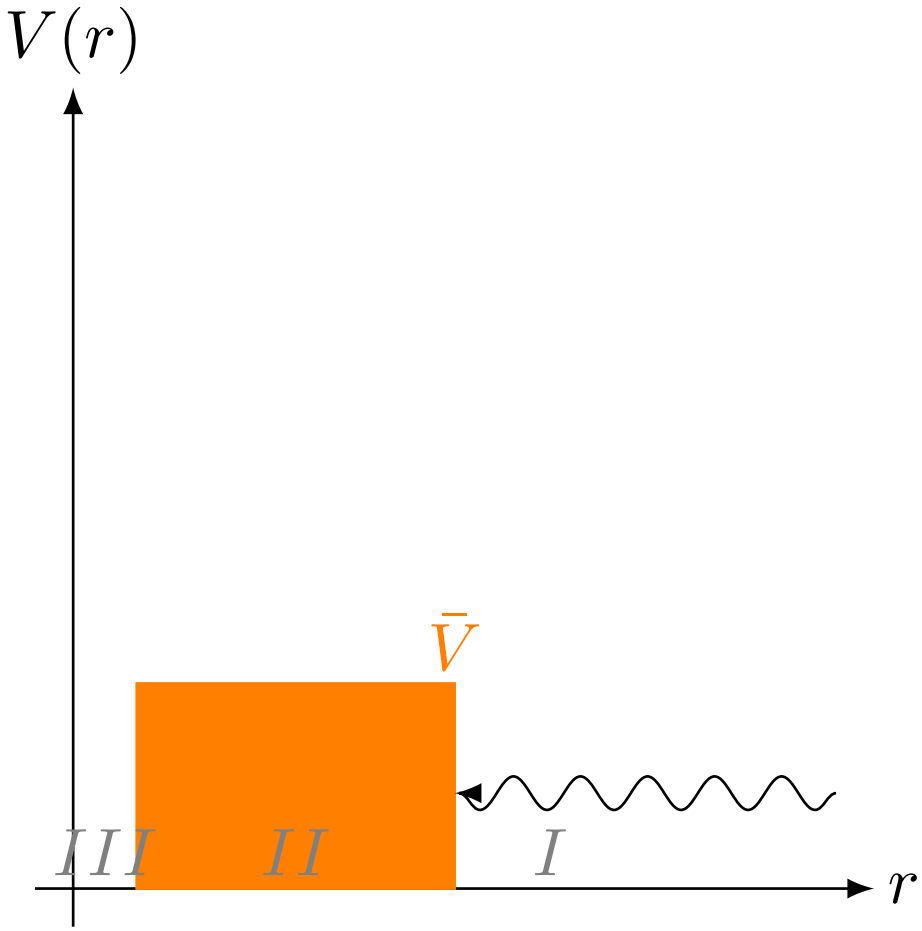
$$\psi'' - k^2\psi = 0\ ,$$
$$k^2 = \frac{2m(V-E)}{\hbar^2}$$

- Lösung:

$$\psi_I = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$$
$$\psi_{II} = C\mathrm{e}^{k'x} + D\mathrm{e}^{-k'x}$$
$$\psi_{III} = E\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$$

Amplituden aus Stetigkeitsbedingungen

Tunneleffekt im eindimensionalen Fall



- Schrödinger-Gleichung:

$$\psi'' - k^2\psi = 0\,,$$
$$k^2 = \frac{2m(V-E)}{\hbar^2}$$

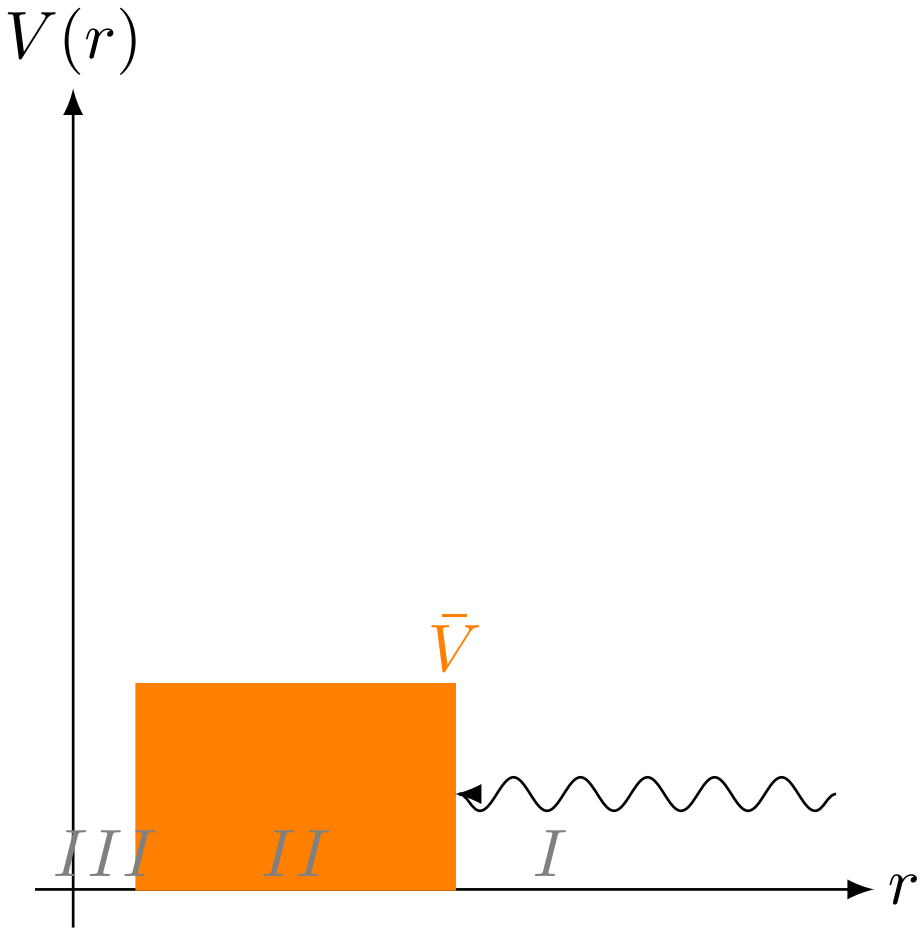
- Lösung:

$$\psi_I = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$$
$$\psi_{II} = C\mathrm{e}^{k'x} + D\mathrm{e}^{-k'x}$$
$$\psi_{III} = E\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$$

- Tunnelwahrscheinlichkeit:

$$T(E) = \frac{|E|^2}{|A|^2}$$

Tunneleffekt im eindimensionalen Fall



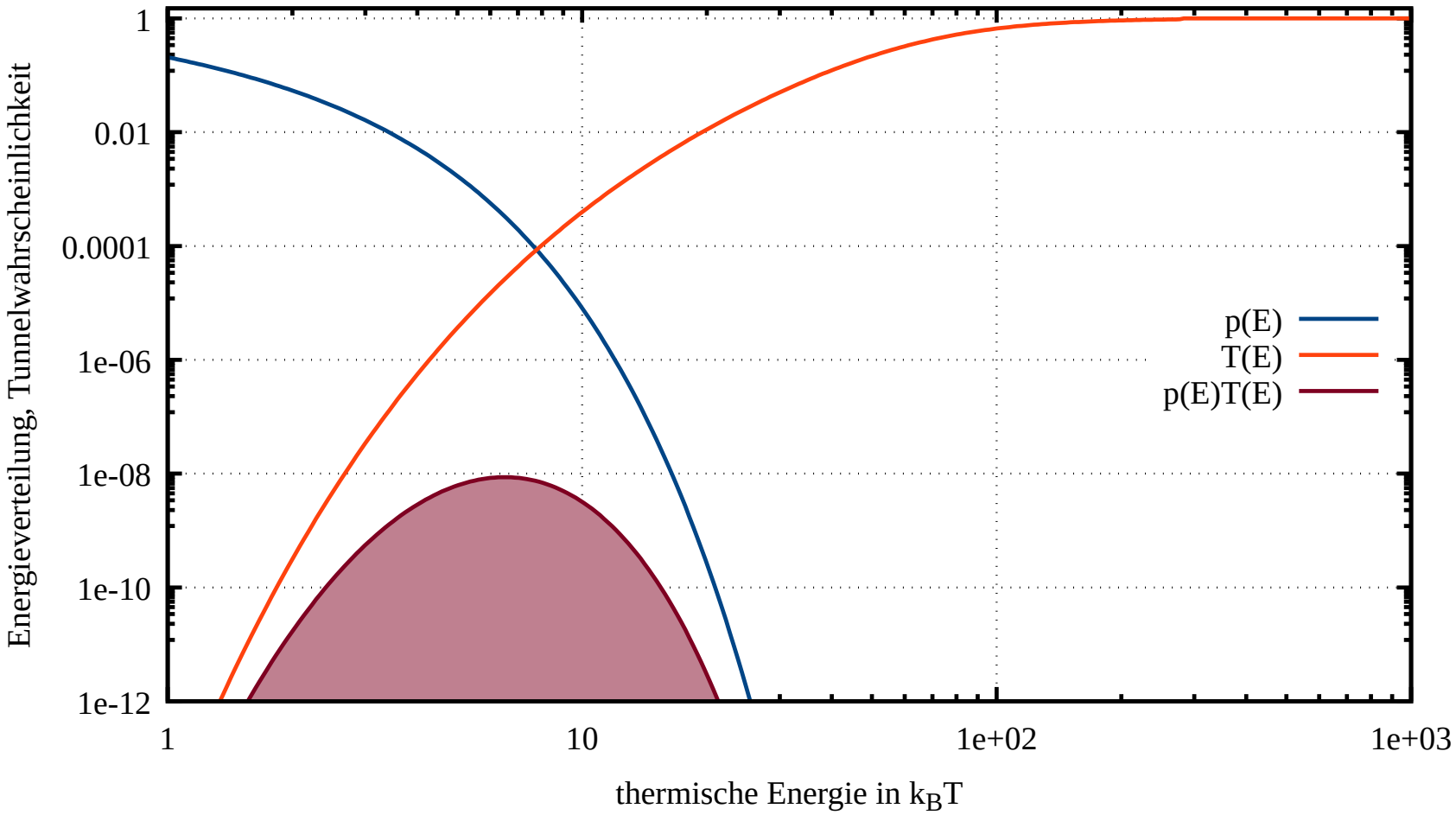
- Schrödinger-Gleichung:

$$\psi'' - k^2\psi = 0 \,,$$
$$k^2 = \frac{2m(V-E)}{\hbar^2}$$

- Tunnelwahrscheinlichkeit:

$$T(E) = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(ka)}{4\varepsilon(1-\varepsilon)}}$$

Tunnelwahrscheinlichkeit



Wirkungsquerschnitt

- ohne Tunneleffekt:

$$\sigma(E) \approx \begin{cases} \pi\lambda^2 & (E \geq V_0) \\ 0 & (E < V_0) \end{cases}$$

Wirkungsquerschnitt

- ohne Tunneleffekt:

$$\sigma(E) \approx \begin{cases} \pi\lambda^2 & (E \geq V_0) \\ 0 & (E < V_0) \end{cases}$$

- mit Tunneleffekt:

$$\sigma(E) \approx \pi\lambda^2 T(E)$$

Wirkungsquerschnitt

- ohne Tunneleffekt:

$$\sigma(E) \approx \begin{cases} \pi\lambda^2 & (E \geq V_0) \\ 0 & (E < V_0) \end{cases}$$

- mit Tunneleffekt:

$$\sigma(E) \approx \pi\lambda^2 T(E)$$

- entscheidend ist die Reaktionsrate:

$$\Gamma = n\sigma(E)v(E)$$

(Teilchendichte n, Geschwindigkeit v)

Wirkungsquerschnitt

- ohne Tunneleffekt:

$$\sigma(E) \approx \begin{cases} \pi\lambda^2 & (E \geq V_0) \\ 0 & (E < V_0) \end{cases}$$

- mit Tunneleffekt:

$$\sigma(E) \approx \pi\lambda^2 T(E)$$

- mittlere Reaktionsrate:

$$\langle\Gamma\rangle = n\langle\sigma(E)v(E)\rangle$$

Wirkungsquerschnitt

- ohne Tunneleffekt:

$$\sigma(E) \approx \begin{cases} \pi\lambda^2 & (E \geq V_0) \\ 0 & (E < V_0) \end{cases}$$

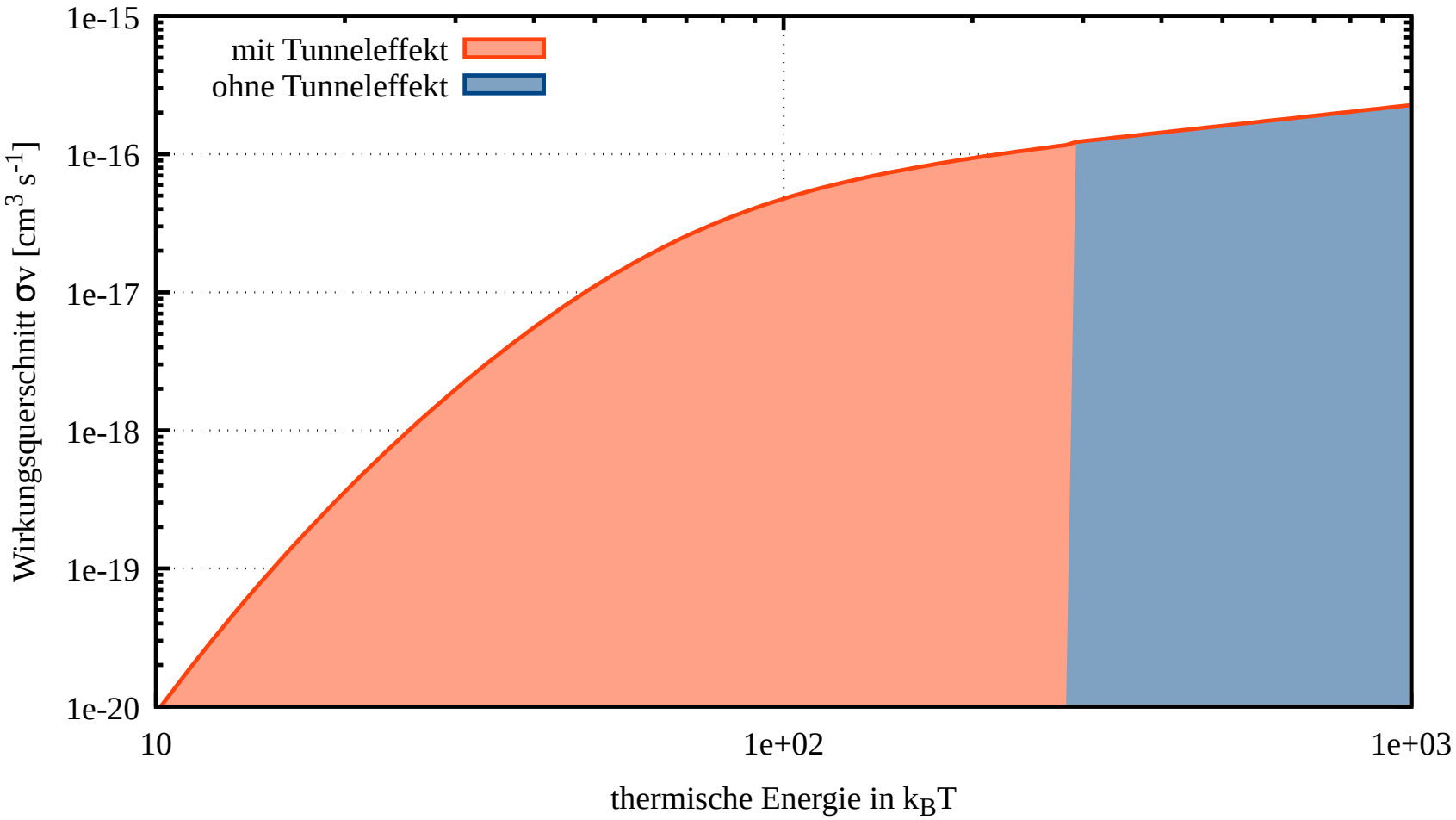
- mit Tunneleffekt:

$$\sigma(E) \approx \pi\lambda^2 T(E)$$

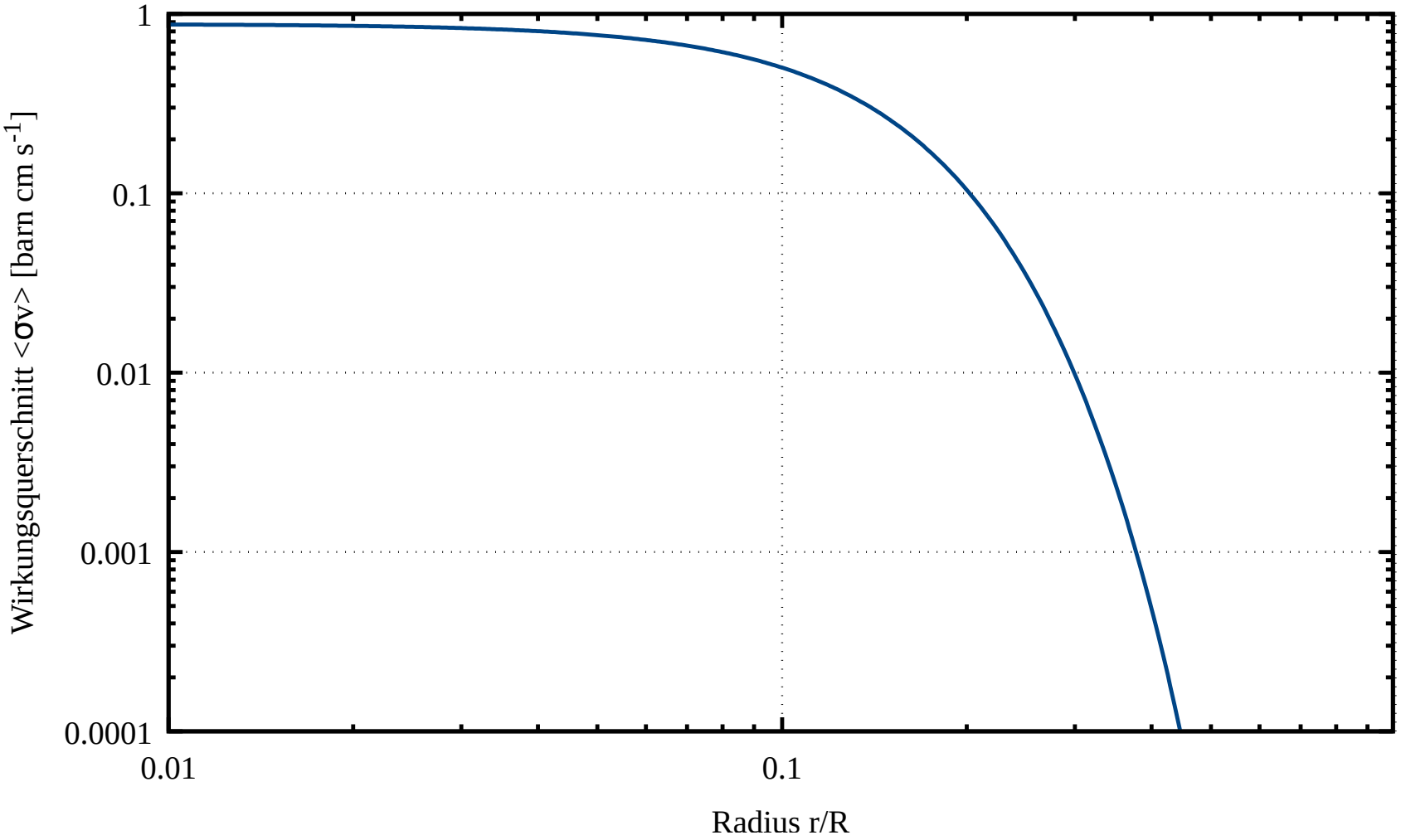
- mittlere Reaktionsrate:

$$\langle\Gamma\rangle = n \int \mathrm{d}E\, p(E)\, \sigma(E) v(E)$$

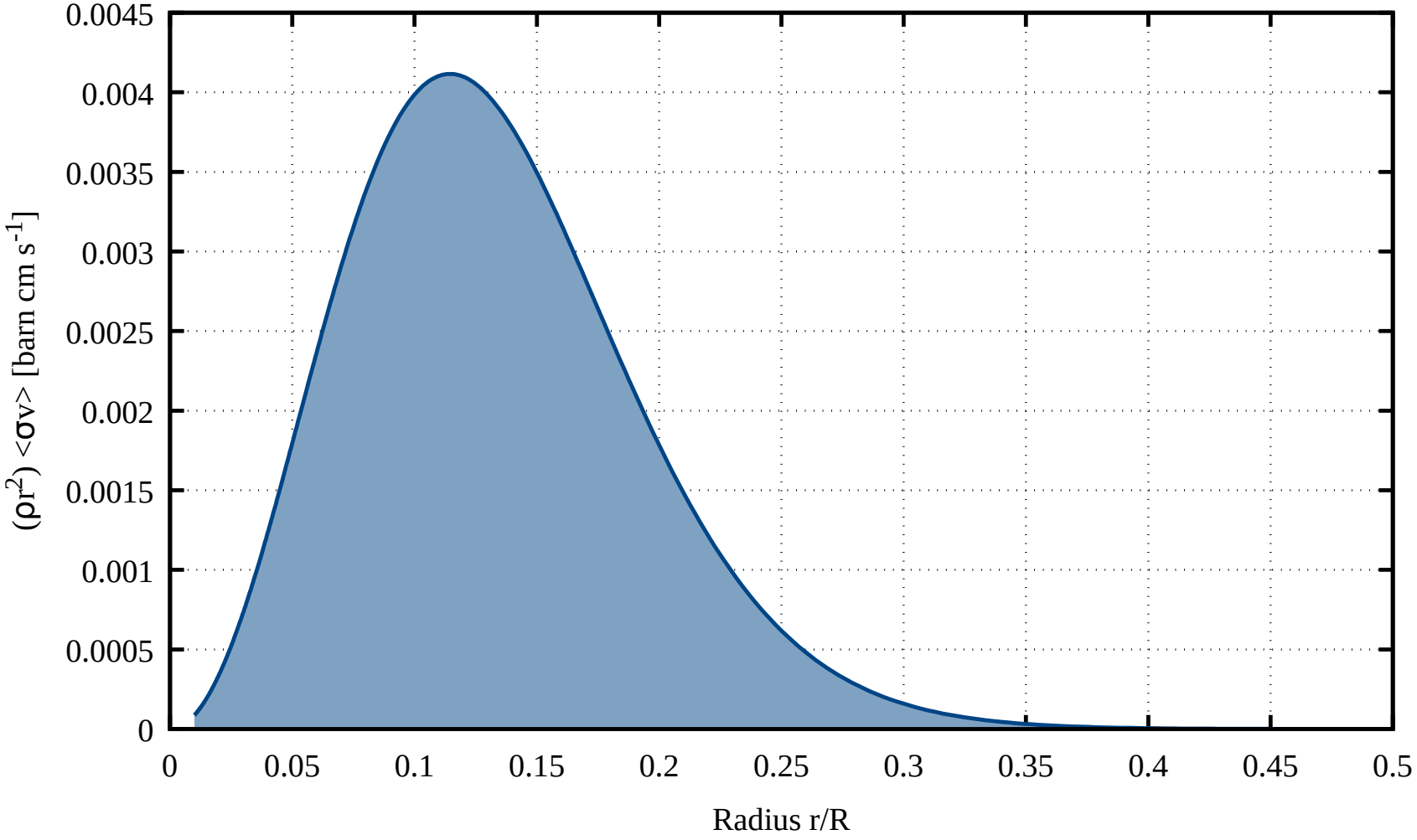
Wirkungsquerschnitt



Gemittelter Wirkungsquerschnitt



Gemittelter Wirkungsquerschnitt



Zusammenfassung

- physikalische Bedingungen im Inneren der Sonne aus der Lane-Emden-Gleichung
- Kernfusion ist unter solchen Bedingungen klassisch unmöglich
- erst der Tunneleffekt ergibt ausreichend hohe Reaktionsraten

Zusammenfassung

- physikalische Bedingungen im Inneren der Sonne aus der Lane-Emden-Gleichung
- Kernfusion ist unter solchen Bedingungen klassisch unmöglich
- erst der Tunneleffekt ergibt ausreichend hohe Reaktionsraten
- aber: eine weitere Spaßbremse bei

$$p + p \rightarrow {}^2\mathrm{H} + \nu_\mathrm{e} + e^+$$

ist der inverse β-Zerfall,

$$p \rightarrow n + \nu_\mathrm{e} + e^+$$