Gravitationswellen Hintergrund – Theorie – Anwendung

Domenico Giulini

ZARM Bremen Leibniz Universität Hannover Riemann Zentrum für Geometrie und Physik

Quantenphysik an der Schule Ein Workshop der Heisenberg Gesellschaft Weilburg a.d. Lahn, 24.06.2018

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Finstein
- Einstein
- Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Historie
- Luminosität
- Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper
- Binärsysteme
- PSR1913+16

Gespräch zwischen Heisenberg und Einstein vom Frühjahr 1926 (5. Kap. aus: *Der Teil und das Ganze*)

- H: Da es aber doch vernünftig ist, in eine Theorie nur die Größen aufzunehmen, die beobachtet werden können, schien es mir naturgemäß, nur diese Gesamtheiten, sozusagen als Repräsentanten der Elektronenbahnen, einzuführen.
- E: Aber Sie glauben doch nicht im Ernst, dass man in eine physikalische Theorie nur beobachtbare Größen aufnehmen kann!
- H: Ich dachte, dass gerade Sie diesen Gedanken zur Grundlage Ihrer Relativitätstheorie gemacht hätten. Sie hatten doch betont, dass man nicht von absoluter Zeit reden dürfe, da man diese absolute Zeit nicht beobachten kann. Nur die Angaben der Uhren, sei es im bewegten oder im ruhenden Bezugssystem, sind für die Bestimmung der Zeit maßgebend.
- E: Vielleicht habe ich diese Art von Philosophie benützt, aber sie ist trotzdem Unsinn. Denn es ist ja in Wirklichkeit genau umgekehrt: Erst die Theorie entscheidet darüber, was man beobachten kann.

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Einstein
- Gravitation and SRT

GW

- Theorie
- Historie
- Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper

- Binärsysteme
- PSR1913+16

Erinnerung an Newtons Gravitationstheorie

▶ Die Newton'sche Gravitationstheorie beruht auf der Feldgleichung

$$\Delta\Phi(t,\vec{x}) = 4\pi G \ \rho(t,\vec{x}) \tag{1}$$

die angibt, wie das Gravitationspotential Φ und damit das Gravitationsfeld $\vec{g}:=-\vec{\nabla}\Phi$ aus der Massendichte ρ erzeugt wird. Hier ist $\Delta=\vartheta_x^2+\vartheta_y^2+\vartheta_z^2$ ein linearer *elliptischer* Differentialoperator (Laplace Operator), der bei gegebenem ρ , Gebiet $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ und Randbedingungen $\Phi|_{\partial\Omega}=\Phi_0$ eine eindeutige Lösung besitzt. Etwa für $\Omega=\mathbb{R}^3$ und $\Phi\to 0$ für $\|\vec{x}\|\to\infty$:

$$\Phi(t,\vec{x}) = -G \int d^3x' \frac{\rho(t,\vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} \tag{2}$$

- ▶ Die Massenverteilung ρ bestimmt das Gravitationspotential Φ eindeutig.
- Die Abhängigkeit des Gravitationsfeldes ist ultra-lokal in der Zeit und nichtlokal im Ort:

$$\rho(t,\vec{x}) = 0 \text{ (für alle } \vec{x}) \Rightarrow \Phi(t,\vec{x}) = 0 \text{ (für alle } \vec{x}) \tag{3a}$$

$$\rho(t, \vec{x}) \neq 0 \text{ (für ein } \vec{x}) \Rightarrow \Phi(t, \vec{x}) \neq 0 \text{ (für alle } \vec{x}) \tag{3b}$$

⇒ Es gibt keine eigenen Freiheitsgrade der Gravitation (Gravitationswellen)! Die gravitative Wirkung von Massen ist instantan!

Prolog

Hintergrund

- Newton

- Newton-Einstein
- Finstein
- Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Luminosität - Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper
- Binärsysteme - PSR1913+16
- Schluss

Newton

Feldgleichungen (Φ)

$$\Delta\Phi = 4\pi G \rho$$

Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}(t))$$

Einstein

► Feldgleichungen (gab)

$$G_{ab}[g_{ab}] = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$$

Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}^{\alpha}(\tau) + \Gamma_{bc}^{\alpha}(x(\tau))\dot{x}^{b}(\tau)\dot{x}^{c}(\tau) = 0$$

Prolog

Hintergrund

- Newton-Finstein

- Finstein

- Gravitation and SRT

GW

- Theorie

- Luminosität - Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper - Binärsysteme

- Binärsysteme - PSR1913+16

Schluss

▶ Bei Newton ist sowohl die Struktur von Raum und Zeit (3+1 dim. affiner Raum) als auch die Trägheitsstruktur (Charakterisierung kräftefreier Bewegung) festgelegt. Gravitation ist eine Kraft. Bei Einstein ist Gravitation, Trägheit und Raum-Zeit Struktur vereinigt. Gravitation ist keine Kraft!

Quelle des Gravitationsfeldes: Der Energie-Impuls-Tensor

$$\mathsf{T}^{\alpha b} = \left(\begin{array}{c|c} W & \frac{1}{c} \, \vec{S}^\top \\ \hline \\ c \, \vec{G} & \Sigma^{\alpha \beta} \end{array} \right) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} W & : & \mathsf{Energie\text{-}Dichte} \\ \vec{S} & : & \mathsf{Energie\text{-}Stomdichte} \\ \vec{G} & : & \mathsf{Impuls\text{-}Dichte} \\ \Sigma^{\alpha \beta} & : & \mathsf{Impuls\text{-}Stromdichte} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} W & : & \mathsf{Energie\text{-}Dichte} \\ \vec{\mathsf{S}} & : & \mathsf{Energie\text{-}Stomdichte} \\ \vec{\mathsf{G}} & : & \mathsf{Impuls\text{-}Dichte} \\ \Sigma^{\alpha\beta} & : & \mathsf{Impuls\text{-}Stromdichte} \end{array} \right.$$

► Symmetrie $T^{ab} = T^{ba}$ ergibt $\vec{S} = c^2 \vec{G}$.

- ▶ Impulstromdichte $\Sigma^{\alpha\beta}$ ist ein Tensor 2. Stufe, denn das, was strömt, ist selbst ein Vektor. Er ist bis aus das Vorzeichen gleich dem Spannungstensor der Flastizitätstheorie
- ▶ In der ART tragen alle 10 unabhängigen Komponenten T^{ab} zur Erzeugung von (aktiv) und Reaktion auf (passiv) Gravitationsfelder bei.
- Bei Sternen wirkt gravitative Wirkung des Druckes destabilisierend.

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Finstein
- Finstein
- Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Historie - Luminosität
- Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper
- Binärsvsteme
- PSR1913+16

Warum so kompliziert?

- ▶ Alle Wechselwirkungen außer der Gravitation (stark, schwach, elektromagnetisch) werden im Rahmen der SRT beschrieben. Geht das nicht auch mit der Gravitation?
- ► Theoretisch gibt es offensichtliche SRT-kompatible Adaptionen der Newton'schen Gravitationstheorie: z.B.

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \to \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} =: \Box \qquad (4)$$

Also

$$\Box \Phi = 4\pi G T_{\alpha}^{\alpha} \tag{5}$$

- Diese Gleichung bechreibt eine skalare Gravitationstheorie, in der auch Gravitationswellen (skalaren Typs) existieren. Sie erfüllt alle formalen Kriterien mathematischer Konsistenz, ist SRT kompatibel und führt auch nicht zu theoretische-unsinnigen Voraussagen.
- Aber sie scheitert an der Erfahrung:
 - Periastronpräzession ist (-1/6) des ART-Wertes.
 - Keine Ablenkung, keine Rotverschiebung und keine Laufzeitverzögerung des Lichtes im Gravitationsfeld.

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Finstein
- Finstein

- Gravitation und SRT

- Theorie
 - Historie
 - Luminosität - Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper
- Binärsvsteme
- PSR1913+16

Die linearisierte ART

Für kleine Krümmungen der Raum-Zeit weicht die Metrik g_{ab} nur wenig von der flachen Minkowski-Metrik η_{ab} der SRT ab. Man schreibt $g_{ab}=\eta_{ab}+h_{ab}$, setzt das in die Einstein-Gleichungen ein und wirft alle Terme weg, die h_{ab} quadratisch oder mit höheren Potenzen enthalten. Es folgt:

$$\Box h_{ab} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ab} \,, \qquad \text{(plus Eichbedingungen)} \tag{6}$$

▶ Diese ist analog den Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik.

$$\Box A_{\alpha} = \mu_0 J_{\alpha}, \qquad \text{(plus Eichbedingungen)} \tag{7}$$

▶ So wie aus (7) streng die Existenz elektromagnetischer (transversaler) Wellen folgt, kann man dies auch aus (6) folgern. Aber im Gegensatz zu (7) ist (6) selbst nur eine Näherung der wahren Theorie. Kann es sein, dass die lineare Näherung Lösungen vorgaukelt, die eigentlich nicht existieren? Einstein dachte eine Zeit lang, das sei der Fall. Genauere mathematische Untersuchungen in den 1950er Jahren haben aber gezeigt, dass das nicht der Fall ist. Dass die Einstein'sche Theorie die Existenz von G-Wellen vorhersagt, ist zweifelsfrei gesichert.

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Einstein
- Einstein
- Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Luminosität
- Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper
- Binärsysteme - PSR1913+16
- Schluss

348 DOC. 32 INTEGRATION OF FIELD EQUATIONS

688 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 22. Juni 1916

Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation

Von A. EINSTEIN.

Bei der Behandlung der meisten speziellen (nicht prinzipiellen) Probleme auf dem Gebiete der Gravitationstheorie kann man sich dannt begnügen, Schauser und der Schauser und der Schauser der Schauser und der Vorzeil Vorzeil er im der Schauser und der Schauser der Schauser und der Schauser der Schauser und der Sc

$$q_{-} = -\delta_{-} + \gamma_{-}$$

definierten Größen γ_{**} , welche linearen orthogonalen Transformationen gegenüber Tensorcharakter besitzen, gegen 1 als kleine Größen behandelt werden können, deren Quadrate und Produkte gegen die ersten Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Dabei ist $\delta_{**}=1$ bzw. $\delta_{**}=0$,

1 Sitenageber, XLVII, 1015, S. 811

(Quelle: Einstein Papers Project, Caltech)

356 DOC. 32 INTEGRATION OF FIELD EQUATIONS

696 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 22. Juni 1916

Gischwohl müßten die Atome zufolge der innerstomischen Elichtronenbewegung nicht nur eilektromagnetische, sondern unde Greitationsenergie ausstrahlen, wenn auch in winzigem Betrage. De dies in Wahrbeit in der Natur nicht zurteffen dirfte, so sebeint es, daß die Quantentheorie nicht nur die Maxwanzehe Elektrodynamit, sondern auch die neue Gravitationstheorie wird modifiseren missen.

Nachtrag. Das seltsame Ergebnis, daß Gravitationswellen erzichters sellen, welche keine Energie transportieren (Typen a. b. c), klärt sich in einfacher Weise suf. Es handelt sich nämlich dabet indet um *realie* Weilen, souder nun *schalbares Weilen, daß darsaf beruhen, daß als Bezugssystem ein wellenartig eitzernder Koordinatensystem beautst wird. Dies sicht man bequen in folgender Weise ein seine State und daß das der das der das der das daß das der das daß $T_f = 1$ talentensystem mas statt (c) als Feldgieldungen bei Abwessenbeit von Material

$$\sum_{i} \frac{\partial^{i} \gamma_{xx}}{\partial x_{x}} + \sum_{i} \frac{\partial^{i} \gamma_{xx}}{\partial x_{x}} - \sum_{i} \frac{\partial^{i} \gamma_{xx}}{\partial x_{x}^{i}} = 0.$$

Führt man in diese Gleichungen direkt den Ansatz

 $\gamma_{n,} = \alpha_{n,} f(x_{i} + ix_{i})$

ein, so erhält man zwischen den Konstanten s_s , 10 Gleichungen, aus denen derrorgeht, daß nur s_s , s_s , und s_s , von null verschieden zein können (wobel s_s , $+s_s$, =0.) Bet dieser Wahl des Bezugaystens existieren also nur diejenigen Wellentypen (d. e. f), welche Energie ratssportieren. De übrigen Wellentypen lassen sich also durch diese Koordinstawahl wegeschäffen; sie sind in dem angegebenen Sinne micht vwirkliches Wellen.

Wenn es also auch in dieser Untermohung nich als betyeen herausgestellt hat, die Wahl des Koordinatensystems von vornheren keiner Beschrinkung zu unterwerfen, wenn es sich um die Berchnung der ersten Niberung handelt, so zeigt unser letzten Ergebnich dech, daß Koordinatenwahl gemäß der Bedingung Y-g= eine tiefe physitalisk Bercheifunge zukomat

(Quelle: Einstein Papers Project, Caltech)

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Einstein
- Einstein
 Gravitation und SRT

- Gravitation und SK

- Theorie

- Historie
- Luminosität
 Wirkung
 - .

Anwendungen

- Starrer Körper
- Binärsvsteme
- PSR1913+16



(Einstein 1916. Quelle: Museum Boerhaave)

12 DOC. I GRAVITATIONAL WAVES

154 Gesamtsitzung vom 14. Februar 1918. - Mitteilung vom 31. Januar

Über Gravitationswellen.

Von A. Einstein.

(Vorgelegt am 31, Januar 1918 [s. oben S. 79].)

Die wichtige Frage, wie die Ausbreitung der Gravitationsfelder ertolgt, ist sehon vor anderslahl Jahren in einer Azademielarbeit von mir behandelt worden. Da aber ennein damatige Darsteilung des Gegenstandes nicht genögend durchsichtig und außerdem durch einen bedauerlichen Rechenfelher vernastiet ist, muß ich läer nechmals auf

[2] die Angelegenheit zurückkommen.

Wie damals beschränke ich mich auch hier auf den Fall, daß

Wie damais beschränke ihn men auch mer auch einem »galileischennur sehr wenig unterscheidet. Um für alle Indizes

$$g_{s} = -\delta_{s} + \gamma_{s}$$
, (1)
setzen zu können, wihlen wir, wie es in der speziellen Relativitäts-

theorie üblich ist, die Zeitvariable x_i rein imaginär, indem wir $x_i = it$

setren, wobei t die «Lichtzeit» bedeutet. In (1) ist $\delta_s = 1$ bzw. $\delta_{s_s} = 0$, je nachdem $\mu = v$ oder $\mu \neq \nu$ ist. Die γ_s , sind gegen 1 kieine Größen, welche die Abweichung des Kontinuums vom feldfreien darstellen: sie bilden einen Tensor vom zweiten Range gegenüber Loxenyz-Transformationen.

 Lösung der Näherungsgleichungen des Gravitationsfeldes durch retardierte Potentiale.

Wir gehen aus von den für ein beliebiges Koordinatensystem gültigen? Feldgleichungen

$$\begin{split} & -\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \begin{Bmatrix} u\tau \\ x \end{Bmatrix} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \begin{Bmatrix} \mu u \\ \alpha \end{Bmatrix} + \sum_{s,\delta} \begin{Bmatrix} us \\ \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v\beta \\ s \end{Bmatrix} - \sum_{s,\delta} \begin{Bmatrix} u\tau \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x\beta \\ \beta \end{Bmatrix} \\ & = -\kappa \left(T_{s,\tau} - \frac{1}{2} g_{s,\tau} T \right). \end{split}$$

 Diese Sitzungsber. 1916. S. 688 ff.
 Von der Eisführung des 2-Gliedes- (vgl. diese Sitzungsber. 1917, S. 142) ist dabeil Abstand genommen.

(Quelle: Einstein Papers Project, Caltech)

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Einstein
- Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Historie
- Luminosität - Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper
- Binärsvsteme
- PSR1913+16
- Schluss

While (Then Rosen and icle) hatten Thurn

unser Maurskeppt gur Tubbkative gesaudt ind textelet autorissert, dusselbe tuckleuten

zu zergen, bevor es gednuckt ist. Auf die (Durgens irrhömlichen) Ausfahrungen

Three anong wer yavashooneen us get engugelren sche ich Meine kraultesseng, of Top Tymud der borkoumnisses zetre ich es Dr.

verandunt, die Arbert andervertig

pre publizieren.

Mest vory. H.

7. 3. Have Rosen, der neish Toviet-Russland abzere Ist sot, but mich outsrision, alle

die Parkliper tion hetreffender Schuste.

(Quelle: Princeton University Press)

Handschriftlicher Entwurf Einsteins eines Briefes an John T. Tate, Herausgeber der Zeitschrift *The Physical Review*, vom 27. Juli 1936, als Reaktion auf die Ablehnung seiner Arbeit mit Nathan Rosen über die vermeintliche Nicht-Existenz von Gravitationswellen.

Referee war Howard Percy Robertson – dessen Kritik zutraf!

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Einstein
- Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Historie
- Luminosität
 Wirkung
- A . . .

Anwendungen

- Starrer Körper - Binärsysteme
- PSR1913+16

Luminosität – Analogie zur ED

 Gemäß (7) stahlt eine Verteilung elektrischer Ladungen Energie in Form EM-Wellen ab, wenn sich das elektrische Dipolmoment D(t) zeitlich verändert. Die Stahlungsleistung (Luminosität) ist.

$$L_{EW} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \cdot \frac{\left\| \overset{\dots}{\overrightarrow{D}}(t) \right\|^2}{3c^3} \quad \longrightarrow \quad \frac{\omega^4}{4\pi\,\epsilon_0} \cdot \frac{\|\overrightarrow{\overrightarrow{D}}_0\|^2}{3c^3} \tag{8}$$

 Analog strahlt gemäß (6) eine Verteilung von Massen Energie in Form von G-Wellen ab, wenn sich das Massen-Quadrupolmoment zeitlich verändert. Die Luminosität ist

$$L_{GW} = G \frac{\left\| \overset{\leftrightarrow}{\overrightarrow{Q}}(t) \right\|^2}{5c^5} \longrightarrow \omega^6 \cdot \frac{G}{5c^5} \cdot \left\| \overset{\longleftrightarrow}{\overrightarrow{Q}}_0 \right\|^2 \tag{9}$$

Beachte

$$D_{\alpha}(t) := \int d^3x \ x_{\alpha} \ \rho(\vec{x}) \tag{10a}$$

$$Q_{ab}(t) := \int d^3x \left(x_a x_b - \frac{1}{3} \delta_{ab} r^2 \right) \rho(\vec{x}) \tag{10b}$$

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Einstein
- Einstein
- Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Luminosität

- Wirkung Anwendungen

- Starrer Körper

- Binärsvsteme
- PSR1913+16

Warum existiert keine gravitative Dipolstrahlung?

▶ Das Dipolmoment zweier Punktmassen ist

$$\vec{D}(t) = m_1 \vec{x}_1(t) + m_2 \vec{x}_2(t) \tag{11}$$

und dessen 2. zeitliche Ableitung ist

$$\ddot{\vec{D}}(t) = m_1 \ddot{\vec{x}}_1(t) + m_2 \ddot{\vec{x}}_2(t)$$
 (12)

 Bewegen sich die Massen unter Einfluss wechselseitig ausgeübter Kräfte, dann gilt Newtons 3. Gesetz (actio = reactio)

$$m_1\ddot{\vec{x}}_1(t) + m_2\ddot{\vec{x}}_2(t) = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$$
 (13)

 Achtung: Dipol- und Quadrupol-Strahlung sind die jeweils dominanten Beiträge des Energieverlustes durch EM bzw. G-Strahlung, keineswegs aber die einzig möglichen.

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Finstein
- Finstein
- Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Historie
- Wirkung

Anwendungen

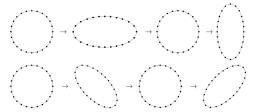
- Starrer Körper
- Binärsvsteme
- PSR1913+16

Wirkung einer G-Welle

► Eine G-Welle ist eine sich mit Lichtgeschwindigkei ausbreitende periodische Änderung der Geometrie von Raum und Zeit. Ihre Ampplitude h gibt die relative Abstandsänderung zweier kräftefrei gelagerter Massen an:

$$h = 2 \cdot \frac{\Delta L}{I} \qquad (LIGO \approx 10^{-21}) \tag{14}$$

➤ Trifft eine GW-Welle auf anfänglich im Kreis angeordnente Massenpunkte (Wellenvektor normal zur Fläche),dann hat man die folgenden zwei linearen Polarisationsfreiheitsgrade



In einem Festkörper sind die Massenelemente nicht kräftefrei, sondern durch unterschiedliche Kräfte in einer geometrischen Gleichgewichtslage, die durch eine GW-Welle gestört wird.

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Einstein
- Einstein
- Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Historie

- Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper - Binärsvsteme
- PSR1913+16

(Quelle: Fotograf Volker Steger)

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Einstein
- Einstein
- Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Historie - Luminosität
- Luminosita

Anwendungen

- Starrer Körper
- Binärsysteme - PSR1913+16
- Schluss

Anwendungen: Starrer Körper

Ein starrer Körper mit Hauptträgheitsmomenten I_{α} , $\alpha=1,2,3$, drehe sich um die 3. Hauptträgheitsachse (HTA) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω ; dann folgt aus (9)

$$L_{GW} = \frac{32}{2} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \Omega^6 \cdot (I_1 - I_2)^2 \tag{15}$$

▶ Dreht man etwa einen massiven Zylinder der Länge L und Durchmesser d, wobei L \gg d, um eine Achse durch den Mittelpunkt und senkrecht zur Zylinderachse (letztere sei die 2. HTA), dann $I_3 = I_1 \gg I_2$ mit $I_1 = ML^2/12$. Also

$$L_{GW} = \frac{2}{45} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \Omega^6 \cdot M^2 \cdot L^4$$
 (16)

▶ Bezeichnet S_{max} die Zerreißspannung des Zylindermaterials, dann ist die maximale Abstrahlungsleistung gegeben durch (Q ist der Querschnitt und ρ die Massendichte des Zylinders)

$$L_{GW}^{\max} = \frac{1024}{45} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \frac{Q^2 S_{\max}^3}{\rho}$$
 (17)

Für $Q=100\,\mathrm{cm}^3$ ergibt sich für Federstahl ($\rho=7,8\,g/\mathrm{cm}^3$, $S_{max}=1600\,\mathrm{N/mm}^2$) und Glasfaser ($\rho/3$, $3S_{max}$) $L_{GW}^{max}=3\cdot 10^{-30}W$ att bzw. das fast 100-Fache.

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Einstein
- Einstein - Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Historie
- Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper - Binärsysteme

Anwendungen: Gravitativ gebundenes Binärsystem

► Für ein gravitativ gebundenes System zweier Sterne gleicher Masse M, die sich im Abstand D jeweils auf Kreisbahnen den gemeinsamen Schwerpunkt umkreisen, ist, ähnlich zu (15),

$$L_{GW} = \frac{8}{5} \cdot \frac{G}{c^5} \cdot \Omega^6 \cdot M^2 \cdot D^4 \tag{18}$$

Im Unterschied zum starren Körper sind hier aber D und Ω durch das 3. Kepler'sche Gesetz gekoppelt (Gravitationskraft=Zentripetalkraft):

$$\Omega^2 = \frac{2GM}{D^3} \tag{19}$$

Eliminieren wir damit Ω aus (18) und führen statt der Masse M den dazu proportionalen Schwarzschildradius $R_S \coloneqq 2GM/c^2$ ein, dann wird aus (18)

$$L_{GW} = \frac{2}{5} \cdot \frac{c^5}{G} \cdot \left(\frac{R_S}{D}\right)^5 \approx 10^{52} \,\text{Watt} \cdot \left(\frac{R_S}{D}\right)^5 \tag{20}$$

Für zwei Neutronensterne ($M=1,4M_{\odot}$) ergibt sich (in Watt) 10^{14} für D=AU, 10^{26} für $D=500.000\,\text{Km}$ und 10^{48} für $D=25\,\text{Km}$ (Durchmesse der Sterne). Letzteres entspricht $L_{EM}^{Universum}$!

Prolog

- Hintergrund
 Newton
- Newton-Finstein
- Finstein
- Gravitation und SRT

CW

- Theorie
- Historie
- Luminosität - Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper
- Binärsysteme - PSR1913+16

Anwendungen: Gravitativ gebundenes Binärsystem (Forts.)

▶ Der Newton'sche Energiesatz des Binärsystens ist

$$E = E_{\rm kin} + E_{\rm pot} = \frac{1}{4}M^2\Omega^2D^2 - G \cdot \frac{M^2}{D}$$
. (21)

Aus 3. Kepler Gesetz folgt (Virialsatz)

$$E = \frac{1}{2}E_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{M^2}{2D} \tag{22}$$

also

$$\frac{\dot{E}}{E} = -\frac{\dot{D}}{D} = \frac{2}{3} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = -\frac{2}{3} \frac{\dot{P}_b}{P_b} \tag{23}$$

► Setzen wir Ė in (23) gleich −L_{GW}, dann erhalten wir (3. Kepler)

$$\dot{P} = -\frac{24}{5} \left(2\pi\right)^{8/3} \left(\frac{R_S}{P_h c}\right)^{\frac{5}{3}},\tag{24}$$

▶ Für den Hulse-Taylor Pulsar ist $P_b = 7,75\,\mathrm{Std}$ und $M = 1,4\,M_\odot$, so dass man $\dot{P}_b = 2\cdot10^{-13}$ erhält. Das unterschätzt den gemessenen Wert um etwa eine Größenordung. Das ist in Anbetracht der Idealisierungen (Kreisbahnen, Linearisierung) nicht schlecht.

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Finstein
- Finstein
- Gravitation und SRT

CW/

- Theorie
- Historie
- Wirkung
- Anwendungen

- Starrer Körper

- Binärsysteme

- PSR1913+16

Dynamik von zwei spinlosen Punktmassen in der ART: Die Post-Newton'sche Approximation

▶ In der ART ist das Kepler'sche 2-Körperproblem nicht integrabel. Deshalb bedient man sich Approximationsmethoden, die sukzessive Terme in einer Entwicklung nach Potenzen von 1/c enthalten. Die Hamiltonfunktion (Energie) eines selbstgravitierenden 2-Teilchensystems beträgt bis und einschließlich Terme 1/c⁴ (2. Post-Newton'sche Ordnung):

$$\begin{split} \mathbf{H} &= \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - G\frac{m_1m_2}{r} \\ &- \frac{1}{8c^2} \left(\frac{\vec{p}_1^4}{m_1^3} + \frac{\vec{p}_2^4}{m_2^2} \right) + \frac{G}{8c^2} \frac{m_1m_2}{r} \left[-12 \left(\frac{\vec{p}_1^2}{m_1^2} + \frac{\vec{p}_2^2}{m_2^2} \right) + 28 \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{m_1m_2} + 4 \frac{(\vec{n} \cdot \vec{p}_1)(\vec{n} \cdot \vec{p}_2)}{m_1m_2} \right] + \frac{G^2}{2c^2} \frac{m_1m_2(m_1 + m_2)}{r^2} \\ &+ \frac{1}{16c^4} \left(\frac{\vec{p}_1^6}{m_1^5} + \frac{\vec{p}_2^6}{m_2^5} \right) + \frac{G}{8c^4} \frac{m_1m_2}{r} \left[5 \left(\frac{\vec{p}_1^4}{m_1^4} + \frac{\vec{p}_2^4}{m_2^4} \right) - 2 \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2}{m_1^2m_2^2} - 11 \frac{\vec{p}_1^2 \vec{p}_2^2}{m_1^2m_2^2} + 5 \frac{\vec{p}_1^2(\vec{n} \cdot \vec{p}_2)^2 + \vec{p}_2^2(\vec{n} \cdot \vec{p}_1)^2}{m_1^2m_2^2} \\ &- 12 \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)(\vec{n} \cdot \vec{p}_1)(\vec{n} \cdot \vec{p}_2)}{m_1^2m_2^2} - 3 \frac{(\vec{n} \cdot \vec{p}_1)^2(\vec{n} \cdot \vec{p}_2)^2}{m_1^2m_2^2} \right] + \frac{G^2}{4c^4} \frac{m_1m_2}{r} \left[m_1 \left(10 \frac{\vec{p}_2^2}{m_2^2} + 19 \frac{\vec{p}_1^2}{m_1^2} \right) + m_2 \left(10 \frac{\vec{p}_1^2}{m_1^2} + 19 \frac{\vec{p}_2^2}{m_2^2} \right) \right. \\ &- \frac{m_1 + m_2}{m_1m_2} \left\{ (27(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) + 6(\vec{n} \cdot \vec{p}_1)(\vec{n} \cdot \vec{p}_2)) \right\} - \frac{G^3}{4c^4} \frac{m_1m_2(m_1^2 + m_2^2 + 5m_1m_2)}{r^3} \end{split}$$

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Einstein
- Einstein

GW

- Theorie
- Historie
- Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper

- Binärsysteme

- PSR1913+16

$$\dot{\omega} = \frac{3n}{c^2} \frac{\left(G(m_1 + m_2)n\right)^{2/3}}{1 - \varepsilon^2}$$
(25a)
$$\gamma = \frac{\varepsilon}{c^2} n^{-2/3} \frac{Gm_2 G(m_1 + 2m_2)}{\left[G(m_1 + m_2)\right]^{4/3}}$$
(25b)
$$\dot{P}_b = -\frac{192\pi}{5c^5} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\left[G(m_1 + m_2)n\right]^{5/3}}{(1 - \varepsilon^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} \varepsilon^2 + \frac{37}{96} \varepsilon^4\right)$$
(25c)

• Messungen von $\dot{\omega}$ und γ erlauben die Massen m_1, m_2 zu bestimmen. Messungen von \dot{P}_b stellen dann echte Tests der ART dar.

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Einstein
- Einstein - Gravitation und SRT

GW

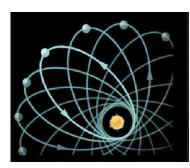
- Theorie
- Luminosität - Wirkung
- Anwendungen

- Starrer Körper

Starrer Korper

- Binärsysteme - PSR1913+16

Periastronpräzession



(Quelle: Jose Wudka)

 Periastronverschiebung pro Umlauf

$$\Delta \varphi = 3\pi \cdot \frac{2GM/c^2}{\alpha(1 - \varepsilon^2)}$$
 (26)

► Ergibt 43″/100y für Merkur, was die fehlenden 8% des totalen Wertes erklärt (Venus 48%, Jupiter 27%, Erde 16%).

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Finstein
- Finstein
- Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Historie
- Luminosität - Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper

- Starrer Korper

- Binärsysteme - PSR1913+16



- Hintergrund
 Newton
- Newton-Finstein
- Einstein
- Gravitation und SRT

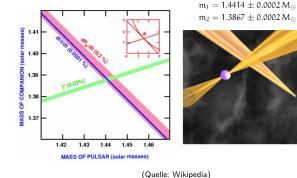
GW

- Theorie
- Historie - Luminosität
- Wirkung
- Anwendungen

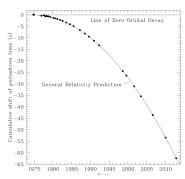
nwendungen

- Starrer Körper - Binärsysteme

- PSR1913+16



PSR 1913+16: Abnahme der Bahnperiode als indirekte Evidenz für die Existenz von G-Wellen



(Quelle: Weisberg-Huang, A.J. 829:55 (2016))

Die gemessene Rate entspricht genau der, die man erhält, wenn man den Energieverlust ausschließlich der Emission von G-Wellen zuschreibt:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3}$$

▶ Nobelpreis 1993 für Hulse & Taylor, "for the discovery of a new type of pulsar, a discovery that has opened up new possibilities for the study of gravitation".

Prolog

Hintergrund

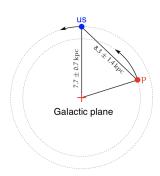
- Newton
- Newton-Finstein
- Finstein Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Historie Luminosität
- Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper
- Binärsvsteme - PSR1913+16



- Differentielle Rotation der galaktischen Scheibe führt zu beschleunigter Dopplerverschiebung, die einen signifikanten Beitrag zu Pbbs liefert.
- Ohne diese Korrektur würden Beobachtungen und Theorie nicht übereinstimmen:

$$\begin{split} \dot{P}_b^{\rm Th} &= -2.40242 \pm 0.00002 \times 10^{-12} \\ \dot{P}_b^{\rm Be} &= -2.4184 \ \pm 0.0009 \ \times 10^{-12} \\ \dot{P}_b^{\rm Kor} &= -0.0128 \ \pm 0.0050 \ \times 10^{-12} \\ \dot{P}_b^{\rm Tot} &= -2.4056 \ \pm 0.0051 \ \times 10^{-12} \end{split}$$

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Finstein
- Finstein
- Gravitation und SRT

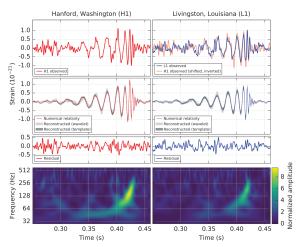
GW

- Theorie
- Historie Luminosität
- Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper - PSR1913+16
- Binärsvsteme

Schluss und Ausblick



(Quelle: Abbott et al. PRL 116 (2016) 061102)

Fin

Gravitationswellen

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Einstein
- Einstein - Gravitation und SRT

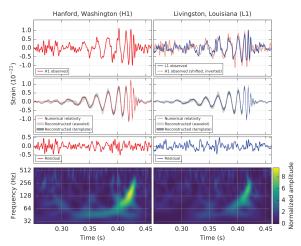
GW

- Theorie
- Historie - Luminosität
- Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper
- Binärsysteme - PSR1913+16

Schluss und Ausblick



(Quelle: Abbott et al. PRL 116 (2016) 061102)

Fin

Gravitationswellen

Prolog

Hintergrund

- Newton
- Newton-Einstein
- Einstein - Gravitation und SRT

GW

- Theorie
- Historie
- Luminosität - Wirkung

Anwendungen

- Starrer Körper
- Binärsysteme - PSR1913+16