Quantenmechanik für das Lehramtsstudium
Zuviel Theorie?

Wolfgang Kinzel

WE Heraeus Seniorprofessor, Theoretische Physik, Universität Würzburg

Lautrach 2017

Zuviel Theorie?

- Nur wer Physik verstanden hat, kann dieses Fach mit Überzeugung vermitteln und Begeisterung wecken $\Rightarrow$
  Umfangreiche fachliche Ausbildung.
- Physik: Universelle quantitative Gesetze aus wenigen Grundgleichungen
- Theoretische Physik: Mit mathematischen Methoden werden aus den Grundgleichungen physikalische Begriffe und Relationen hergeleitet.
- Quantenmechanik: Nur die Mathematik beschreibt mikroskopische Eigenschaften, Anschaulichkeit ist nur noch ein Hilfsmittel

Grundgleichungen

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = -\nabla V(\vec{r}(t), t)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{x}, t) + V(\vec{x}, t)\Psi(\vec{x}, t)$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\varepsilon_0}, \nabla\cdot\vec{B} = 0, \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \nabla\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}(\vec{x}, t) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

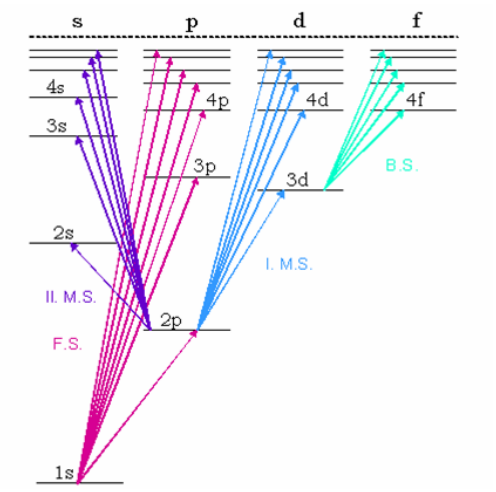
$$x' = \gamma\,(x - vt)\,, t' = \gamma\left(t - \frac{x}{c}\frac{v}{c}\right), \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

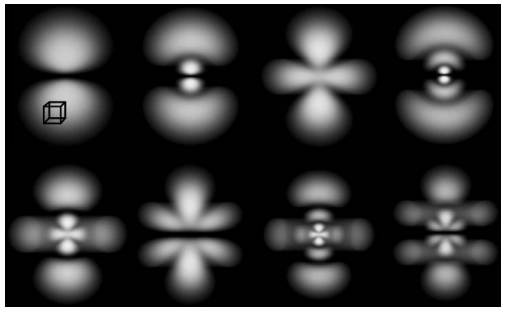
$$F(T, V, N) = E - TS = -k_B\,T\ln Z = -k_B\,T\ln\sum_n \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_n}{k_B T}}$$

Entropie $S(E, V, N)$, $dE = T\,dS - p\,dV + \mu\,dN$, $\Delta S \geq 0$

Schrödinger-Gleichung

Erwin Schrödinger 1926





Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen im Potential V

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{x},t) + V(\vec{x},t)\Psi(\vec{x},t) = \hat{H}\Psi$$

Postulate der Quantenmechanik

- Der Zustand eines physikalischen Systems wird durch ein Element $|\Psi\rangle$ eines Hilbertraumes beschrieben.
- Die zeitliche Entwicklung eines Zustandes wird durch den selbstadjungierten Hamiltonoperator beschrieben, $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle$
- Der Hamiltonoperator $\hat{H}$ wird durch die entsprechende Hamiltonfunktion definiert, indem Orte und Impulse durch die jeweiligen Orts- und Impulsoperatoren ersetzt werden.
- Eine Messung wird durch einen selbstadjungierten Operator $\hat{A}$ beschrieben. Die Eigenwerte von $\hat{A}$ sind die möglichen Messergebnisse. Nach der Messung des Eigenwertes a befindet sich das System im zugehörigen Eigenzustand , $|\Psi\rangle \to |a\rangle$.
- Die Wahrscheinlichkeit, im Zustand $|\Psi\rangle$ den Wert a zu messen, ist $P_a = |\langle\Psi|a\rangle|^2$ Der Mittelwert vieler Messungen am Zustand $|\Psi\rangle$ ist $\langle\hat{A}\rangle = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle$
- Die Wahrscheinlichkeit, im Zustand $|\Psi\rangle$ die Eigenschaften eines anderen Zustandes $|\phi\rangle$ zu messen, ist $|\langle\phi|\Psi\rangle|^2$
- Bei mehreren unabhängigen Freiheitsgraden ist der gesamte Hilbertraum das Produkt der jeweiligen Hilberträume.

Interpretation der Quantenmechanik

Die Quantenmechanik beschreibt nur Messprozesse

- Niels Bohr: Wer über die Quantentheorie nicht entsetzt ist, hat sie nicht verstanden.
- Richard Feynman: Wer die Quantentheorie verstanden hat, hat sie nicht verstanden.
- Albert Einstein: Gott würfelt nicht.
- Werner Heisenberg: Nur wenige wissen, wie viel man wissen muss, um zu wissen, wie wenig man weiß.

Physik für das Lehramt an Gymnasien

1 Arbeitseinheit (ECTS-Punkt, Credit Point, Leistungspunkt) = 30 Stunden
2 Doppelstunden Vorlesungen plus Übungen = 8 AE

Studium an der Universität Würzburg:
90 AE Physik
90 AE Zweites Fach
90 AE Hausarbeit, Fachdidaktik und Erziehungswissenschaten

Physik:
49 AE Experimentelle Physik
15 AE Theoretische Physik (Zwei Semester)

Vergleich mit Bachelor/Master Physik:
300 AE Physik

Bayern

Staatsexamen in Theoretischer Physik für das Lehramt an Gymnasien

Schwierige Aufgaben aus Mechanik, Quantenmechanik, Elektrodynamik und Thermodynamik
4 Std. Zeit, Wahl aus jeweils zwei Aufgaben
1-2 Semester Vorbereitung

Frühjahr 2017:

Aufgabe 1: Teilchen im sphärischen Delta-Potential

Die stationäre Schrödinger-Gleichung in Kugelkoordinaten (r, ϑ, ϕ) lautet

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - E\right)\Psi(r,\vartheta,\varphi) = 0\,, \quad \Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,.$$

Betrachtet werden sollen gebundene Zustände mit $E < 0$ für den Fall eines schalenförmigen Delta-Potentials $V(r) = -(\hbar^2/2m)\nu\delta(r-R)$ mit $\nu > 0$ und $R > 0$. Die Distribution $\delta(r - r_0)$ hat die Eigenschaft $\int_0^\infty \delta(r-r_0)\,\mathrm{d}r = 1$.

Vorlesungen für das Lehramtsstudium

Studie und Empfehlungen der DPG 2006, 2014

- Weniger ist mehr
- Nicht fachsystematisch, sondern exemplarisch
- Verstehen anstatt nur rechnen
- Ganzheitliche Sicht, Zusammenhänge betonen
- Geschichte der Physik
- Computersimulation
- Reden über Physik
- Wiederholen
- Bezug zu Anwendungen

$\Rightarrow$ Eigene Vorlesung für das Lehramt

Würzburg:

4 Semester fortgeschrittene Experimentalphysik

2 Semester Theoretische Physik

Randbedingungen für die QM-Ausbildung

- Wenig Zeit: 13 Doppelstunden Vorlesung plus Übungen
- Lehramtsspezifische Vorlesung
- Staatsexamen

Moderne Physik 2

500 Folien über Molekül- und Festkörperphysik,
6 Seiten Inhaltsverzeichnis

Chemische Bindungen, Spektren, Kristallgitter, Strukturbestimmung, Bindungen in Kristallen, Gitterdynamik, Thermische Eigenschaften, Bänder und Fermi-Flächen, Transport, Halbleiter, Dielektrika, Magnetismus, Supraleitung

Inhalt der QM-Vorlesung

Quantenmechanik

1. Schrödinger-Gleichung
   1.1. Wellenfunktion
   1.2. Freies Teilchen
   1.3. Wellenpaket
   1.4. Erwartungswerte und Schwankungen
   1.5. Orts-, Impuls- und Hamilton-Operator
   1.6. Stationäre SG
   1.7. Zeitliche Entwicklung eines Zustandes

2. Eindimensionale Quantenmechanik
   2.1. Quantentopf
   2.2. Gebundene Zustände
   2.3. Streuzustände
   2.4. Tunneleffekt
   2.5. Harmonischer Oszillator
   2.6. Pauli-Prinzip
3. Abstrakte Quantenmechanik
   Postulate
   3.1. Hilbertraum
   Skalarprodukt, Basis=Vollständiges Orthonormalsystem
   3.2. Operatoren
   Algebra, Kommutator, adjungiert, selbstadjungiert, unitär, Projektor, Spektraldarstellung
   3.3. Mittelwerte der Messergebnisse
   Wahrscheinlichkeiten, Ehrenfest-Gleichung, Erhaltungsgrößen
   3.4. Fluktuationen der Messergebnisse,
   Unschärfe-Relationen
   3.5. Gemeinsame Eigenbasis zweier Messgrößen
   3.6. Matrizenmechanik
4. Drehimpuls
   Motivation und Resultate
   4.1. Operatoralgebra
   Leiteroperatoren, Mittelwerte und Fluktuationen
   4.2. Matrizenmechanik
   4.3. Eigenfunktionen im Ortsraum
   Kugelflächenfunktionen
   4.4. Wasserstoff-Elektron
   4.5. Wasserstoff im Magnetfeld
5. Spin
   5.1. Spinoperator und Hilbertraum
   5.2. Spinpräzession
   5.3. Spinresonanz
   5.4. Zwei wechselwirkende Spins
   5.5. Quantencomputer

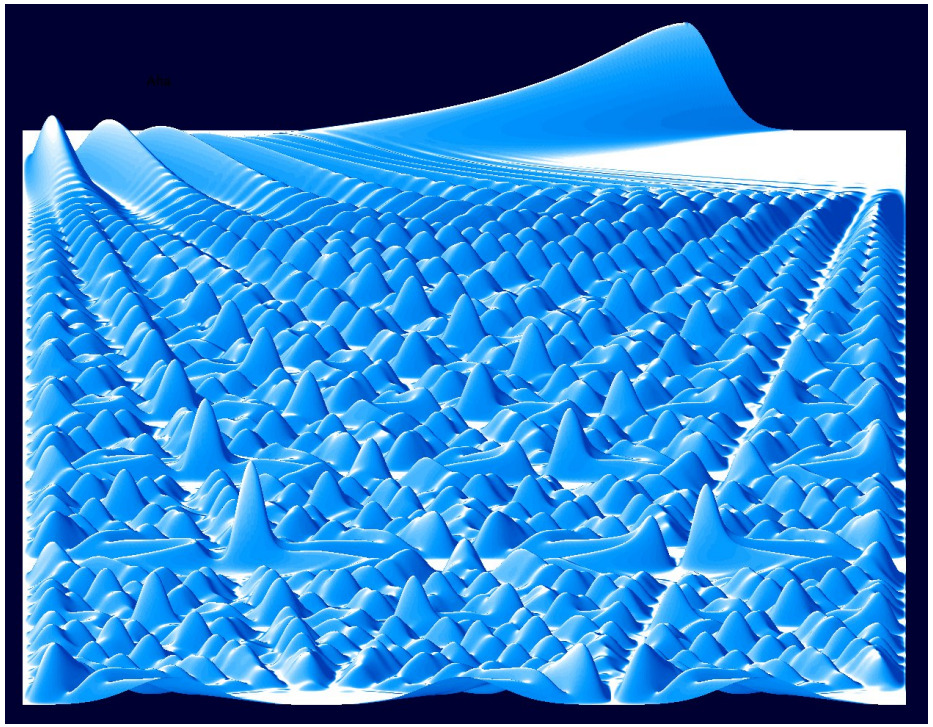
Fragen

Antworten aus der Schrödingergleichung (plus Postulate)

- Welche physikalische Bedeutung hat die Lösung $\Psi(\vec{x}, t)$ der SG? Aufenthaltswahrscheinlichkeit, Überlagerung, Doppelspalt
- Wieso sind Operatoren notwendig? Impuls-Operator, Vertauschungsrelation, Energie und Hamilton-Operator, Erwartungswerte und Schwankungen
- Welche Eigenschaften hat ein freies Teilchen? Wellenpaket, Heisenberg'schen Unschärfe
- Wieso liefert eine kontinuierliche DGL diskrete Energieniveaus? Stationäre Zustände, Quantentopf
- Wieso beschreiben stationäre Zustände die Streuung am Potentialtopf? Wahrscheinlichkeitsstrom, Amplituden aus Randbedingungen

Fragen

Wie wird Bewegung beschrieben? Entwicklung nach Eigenzuständen



Fragen

- Wieso kann man eine DGL algebraisch lösen? Harmonischer Oszillator, Leiteroperatoren, Kommutator-Relationen, Photonen und Phononen
- Warum ist der Drehimpuls quantisiert? Kommutator-Relationen, Leiteroperatoren, Zeemann-Effekt
- Warum kann man nicht immer zwei Größen gleichzeitg scharf messen? Kommutator, gemeinsame Eigenbasis, Drehimpuls
- Welche mathematische Struktur hat die Quantenmechanik? Hilbertraum, Operatoren, Eigenbasis, Lineare Algebra, Matrizenmechanik
- Welche Eigenschaften hat der Spin? Drehimpulsalgebra, zweidimensionaler Vektorraum, Spin-Präzession und -Resonanz, Photonen

Zusammenhänge

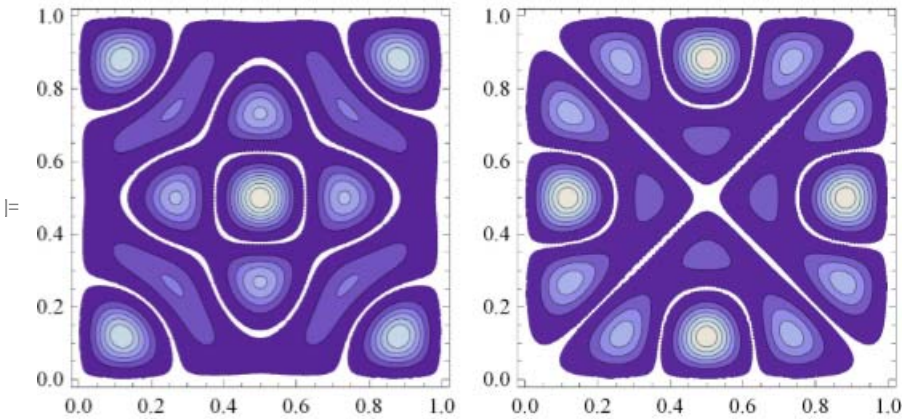
- Wieso ist die klassische Mechanik ein Grenzfall der Quantenmechanik? Ehrenfest-Gleichungen

$$m\frac{d}{dt}\langle\vec{x}\rangle = \langle\vec{p}\rangle, \quad \frac{d}{dt}\langle\vec{p}\rangle = -\langle\nabla U\rangle, \quad \frac{d}{dt}\langle\hat{H}\rangle = 0$$

- Wellen in der Physik? Seil- und elektromagnetische Wellen, Phasengeschwindigkeit, Diffusion, Faktor i
- Zentrifugalpotenzial? Zweikörperproblem, Wasserstoffelektron, $\frac{L^2}{2mr^2} \Rightarrow \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$
- Schwingende Systeme? Menge von harmonischen Oszillatoren, Phononen
- Harmonischer Oszillator und Drehimpuls? Limes $n \to \infty$ und $l \to \infty$

Zwei oder mehrere Teilchen

Was folgt aus der Ununterscheidbarkeit von Teilchen? Pauli-Verbot, Chemie, Festkörperelektronen, Spin-Wechselwirkung



Zwei Teilchen befinden sich im eindimensionalen Kastenpotential im zweiten und dritten Energieniveau ohne gegenseitige Wechselwirkung. Die Abbildung zeigt die Höhenlinien von $|\Psi(x_1, x_2)|^2$. Welches Bild zeigt zwei Fermionen oder zwei Bosonen?

Zwei oder mehrere Teilchen

- Welche Eigenschaften haben zwei Spins? Singulett, Triplett, Atomphysik
- Was ist spukhafte Fernwirkung? Messung am Singulett
- Warum würfelt Gott? GHZ-Zustand dreier Spins
- Warum liefert die QM eine sichere Verschlüsselung? Messung ändert den Zustand
- Wieso kann man mit einem Quantencomputer schneller rechnen? Überlagerung, unitäre Transformation, Projektor

Siehe: Von QBits lernen, Wolfgang Dür, Physik-Journal Juni 2017

Zusammenfassung

Zuviel Theorie in der Quantenmechanik-Vorlesung?

- Wichtige Themen für den Schulunterricht
- Positive Beurteilung von Studierenden und LehrerInnen
- Gute Ergebnisse der Klausur
- Vorbereitung auf das Staatsexamen

Skript zur Vorlesung:
http://www.we-heraeus-stiftung.de/
oder
https://www.physik.uni-wuerzburg.de/tp3/lehre/skripte_fuer_das_lehramt/