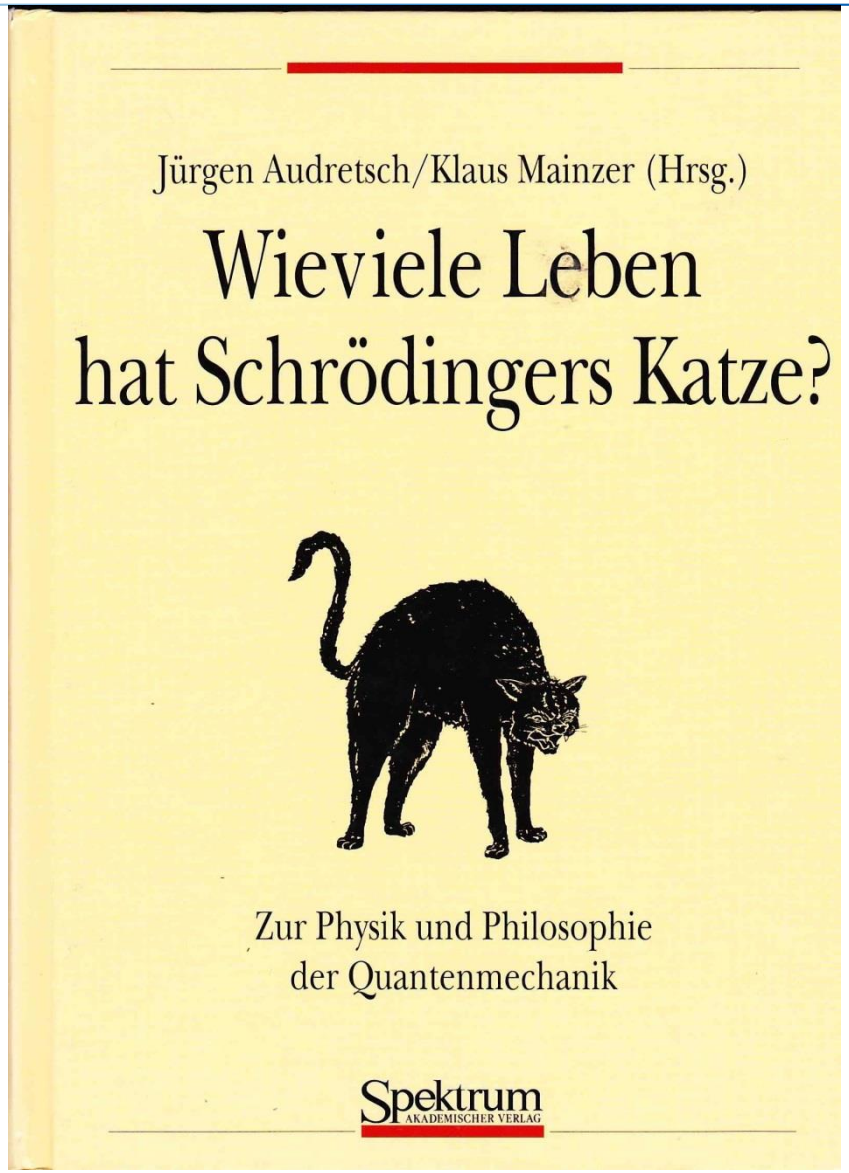
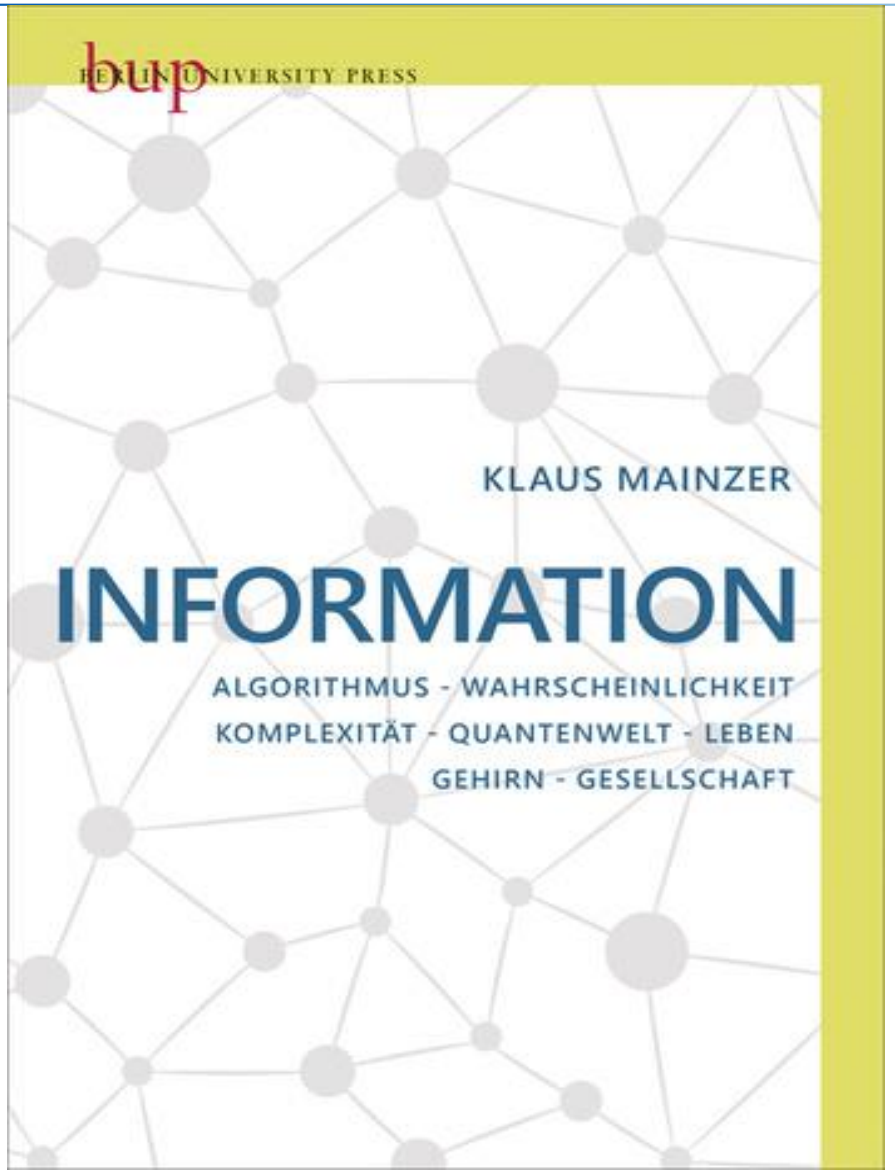
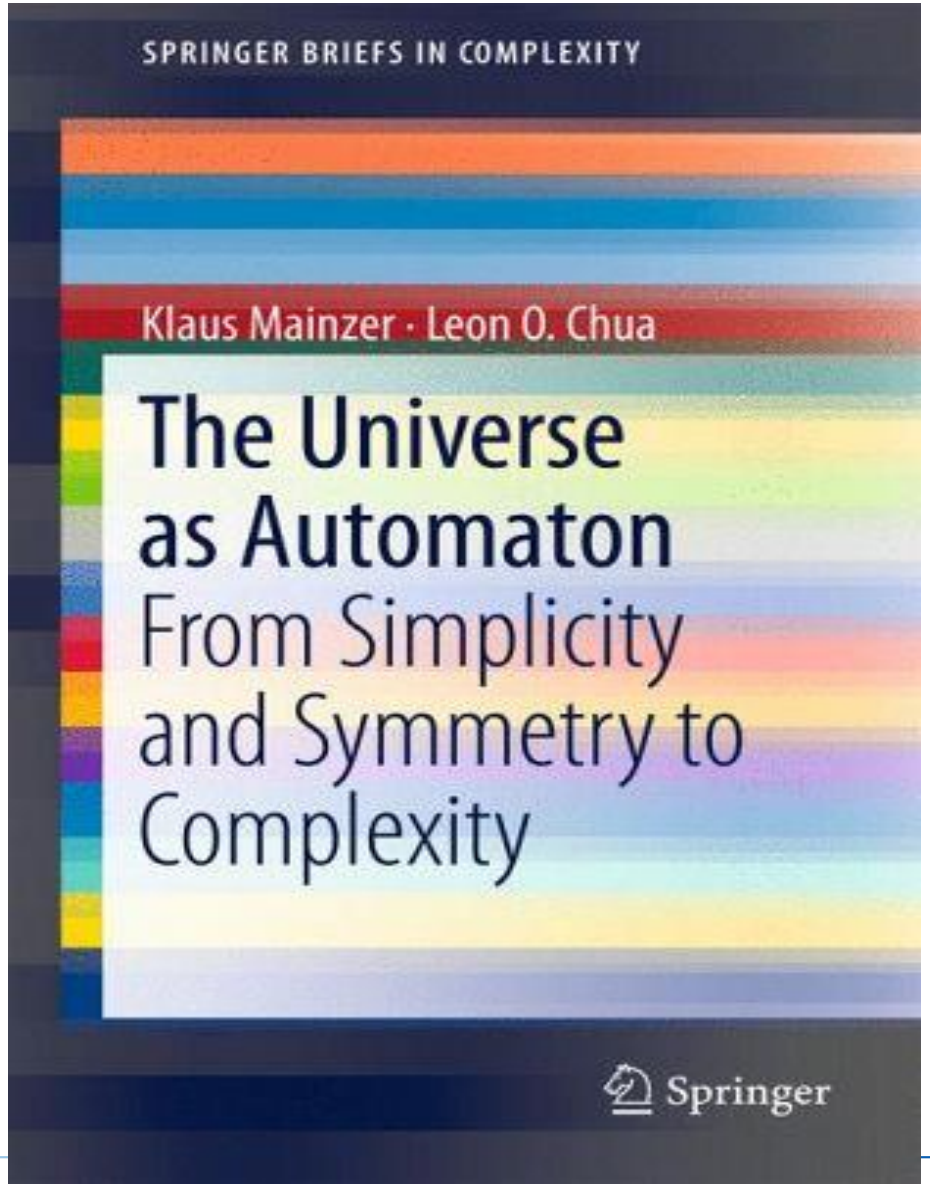
Quanteninformation und die Interpretationsdebatte der Quantentheorie

Klaus Mainzer
Lehrstuhl für Philosophie und Wissenschaftstheorie
Graduate School of Informatics
Technische Universität München


Jürgen Audretsch/Klaus Mainzer (Hrsg.)
Wieviele Leben hat Schrödingers Katze?
Zur Physik und Philosophie der Quantenmechanik
Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG


bup
BERLIN UNIVERSITY PRESS
KLAUS MAINZER
INFORMATION
ALGORITHMUS - WAHRSCHEINLICHKEIT
KOMPLEXITÄT - QUANTENWELT - LEBEN
GEHIRN - GESELLSCHAFT


SPRINGER BRIEFS IN COMPLEXITY
Klaus Mainzer · Leon O. Chua
The Universe as Automaton
From Simplicity and Symmetry to Complexity
Springer

Klaus Mainzer
Die Berechnung der Welt
Von der Weltformel
zu Big Data
C.H.Beck

1. **Grundbegriffe der Quantenmechanik**

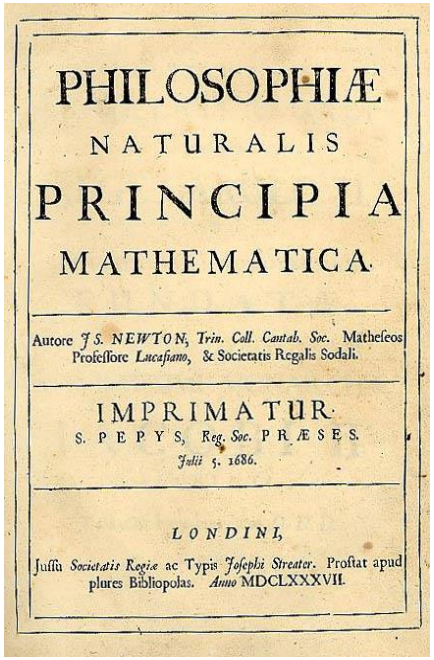
2. **Interpretationen der Quantenmechanik**

3. **Grundbegriffe der Quanteninformation**

4. **Qanteninformatorische Interpretation der Quantenmechanik**

1. Grundbegriffe der Quantenmechanik

Newton: Mechanik und Kausalität


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

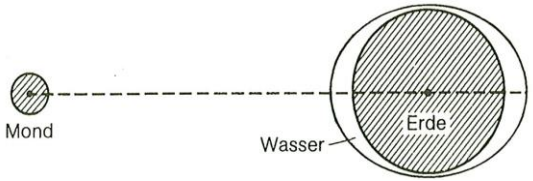
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

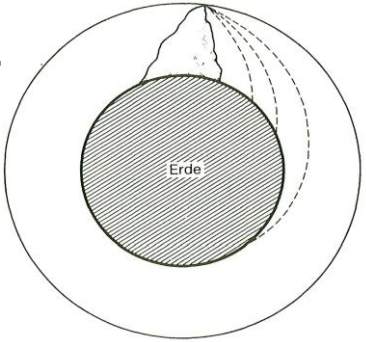
Isaac Newton (1642-1727) begründete in seinen „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ (1687) die *mathematischen Grundlagen der Mechanik*. Diese Theorie besteht aus *Definitionen* von Grundbegriffen (z.B. Raum, Zeit) und drei *Grundgesetzen*:

1) ***Trägheitsgesetz*** **(lex inertiae)**
2) ***Kraftgesetz*** **:** $\vec{K}=m\vec{b}$ **(*K* Kraft, *m* Masse, *b* Beschleunigung)**
3) ***Wechselwirkungsgesetz*** **(actio = reactio)**

Zentrales Beispiel für eine *Kraft* ist die *Gravitation*.

Aus Mechanik und *Gravitationsgesetz* lassen sich *Erdphysik* (Fall-, Wurf-Pendelgesetze) und *Himmelsphysik* (Keplers Planetengesetze, Ebbe und Flut) als Modelle mathematisch ableiten.





Leibniz: Determinismus und Zufall

Nach G. W. Leibniz (1646-1716) geschieht *nichts ohne Grund* („*Nihil sine ratione*“). Ein Ereignis ist *zufällig*, wenn es *keinen Grund* hat. Wenn wir *den Grund* bloß *nicht kennen* (*subjektiver Zufall*), kann das Ereignis dennoch *determiniert* sein (z.B. „zufälliger“ Unfall mit Zug).

***Quantenereignisse* können keinen Grund haben (*objektiver Zufall*), da sie *erst durch Messung entschieden* werden (z.B. verschränkte Zustände): Vorher gibt es *prinzipiell keine Information*!**

Maxwell: Elektrodynamik als deterministische Theorie

Die Maxwellschen *Gleichungen* begründen die *Elektrizitätslehre und den Magnetismus*. Ihre Eleganz wurde zum Vorbild *mathematischer Naturgesetze*. Auf ihnen beruht die moderne *Elektrotechnik*.

Integrale Form	Differentielle Form	Bedeutung auf *physikalisch* :-)
$\oint_O \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0$	$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0$	Das magnetische Feld ist quellenfrei.
$\oint_O \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = Q$	$\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = \rho$	Der Fluß durch eine bestimmte Oberfläche ist gleich der eingeschlossenen Ladung.
$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$	$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$	Zeitlich sich ändernde Magnetfelder erzeugen ein elektrisches Feld. (Faradaysches Induktionsgesetz)
$\oint_S \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + I$	$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}$	Zeitlich sich ändernde elektrische Felder erzeugen ein Magnetfeld. (Amperesches Gesetz mit Maxwellscher Ergänzung)

Maxwell proved, dass *elektrische* und *magnetische Kräfte* zwei *sich ergänzende Erscheinungen* des *Elektromagnetismus* sind und dass sich elektrische und magnetische Felder in Form von *elektromagnetischen Wellen* mit einer *konstanten Geschwindigkeit* von etwa $3 \cdot 10^8$ m/s durch den Raum bewegen können, was genau der *Lichtgeschwindigkei*t entspricht.

Boltzmann: Thermodynamik und statistische Mechanik

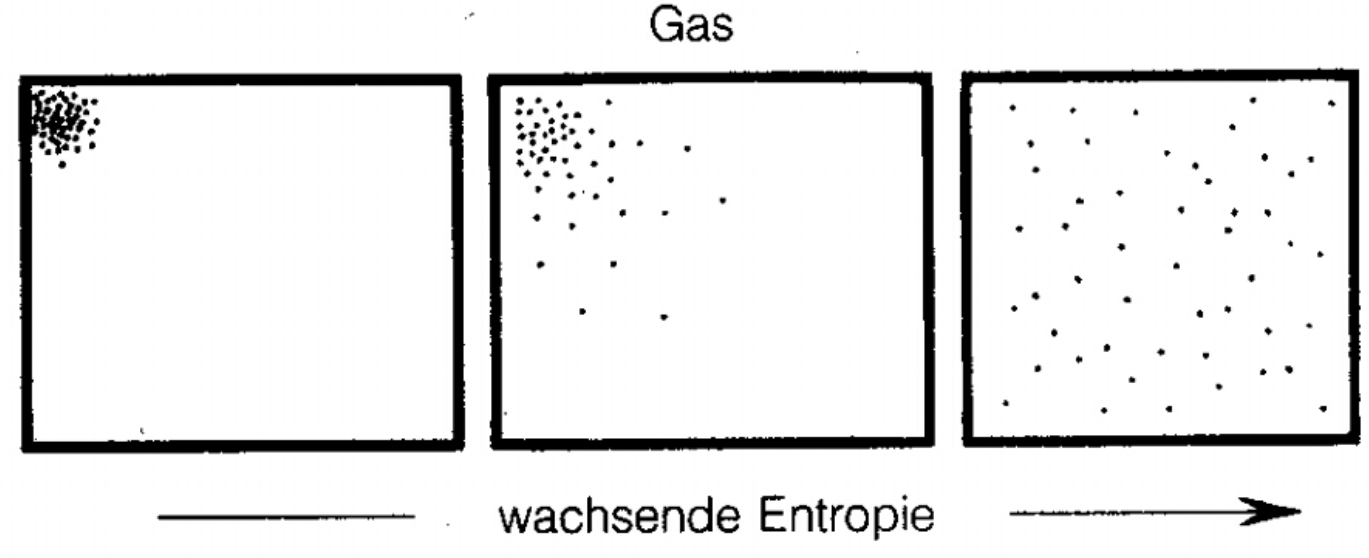
Boltzmann (1844-1906) führt *makroskopische Zustände* thermodynamischer Systeme (z.B. Temperatur eines Gases) auf die *statistische Mechanik* ihrer *Elemente* (z.B. Gasmoleküle) zurück:

$$S = k_B \ln W$$

mit *S Entropie*, k_B *Boltzmann-Konstante* und *W Anzahl* der *Wahrscheinlichkeitsverteilungen* von *Mikrozuständen*, die den *Makrozustand* erzeugen können.

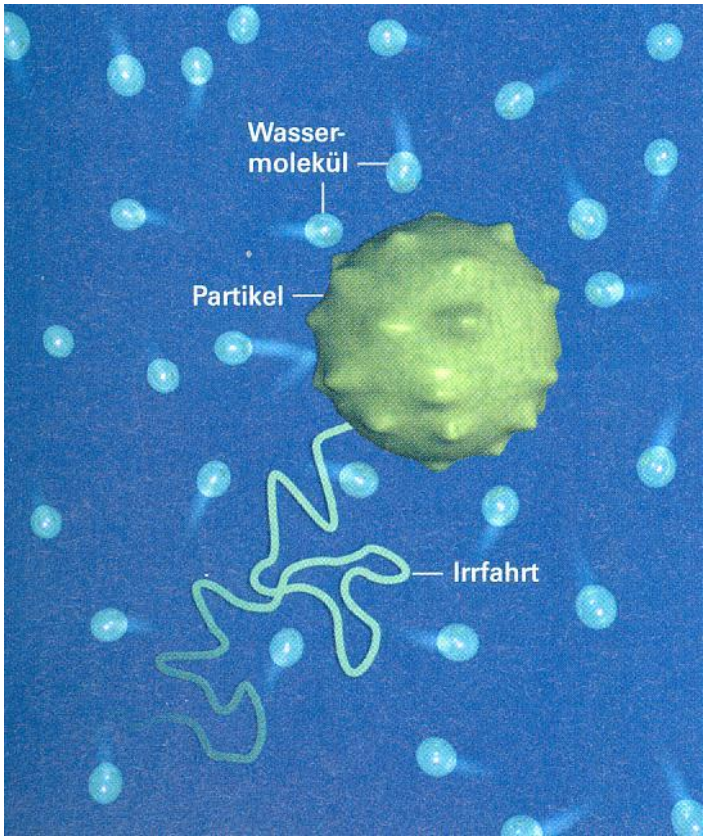
„Statistik ist Menschenwerk“

***Wachsende Entropie* nach dem *2. Hauptsatz* entspricht dem *Übergang* von einer *geordneten* und *unwahrscheinlichen* zu einer *ungeordneten* und *wahrscheinlichen Verteilung* im *thermischen Gleichgewicht*. *Die Reversibilität des Makrozustands* ist hoch *unwahrscheinlich* trotz *Mikroreversibilität* der *molekularen Stoßgesetze*.**



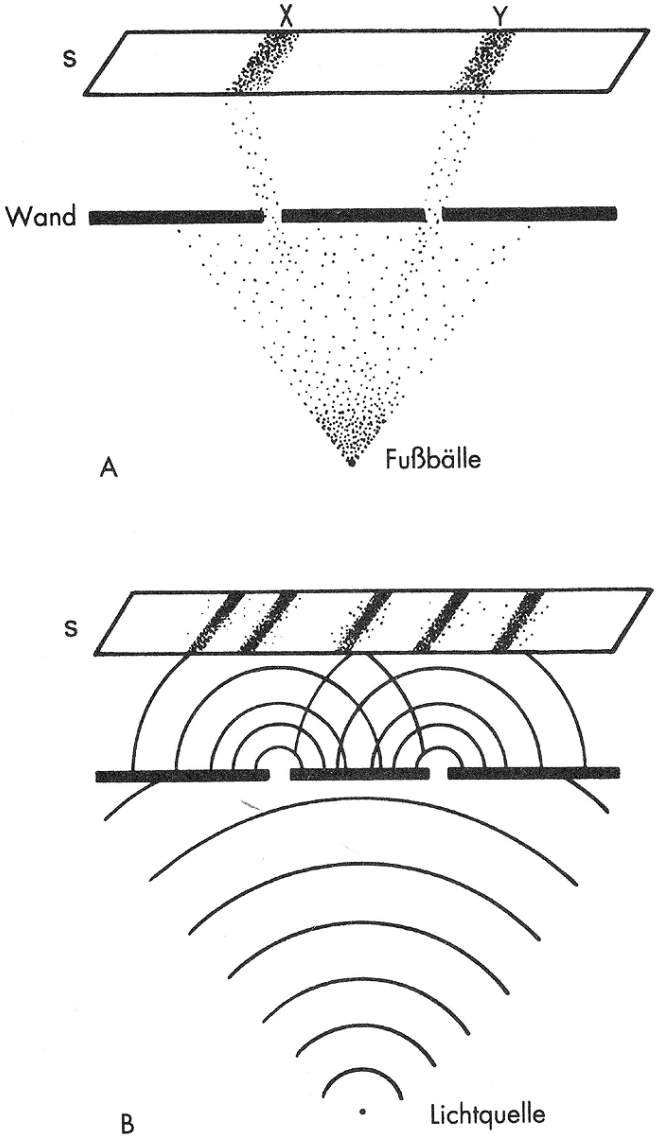
Das *Verhalten der Mikroelemente* wird als *eindeutig determiniert* nach den *Gesetzen der Mechanik* angenommen.

Zufall und Statistik der Brownschen Bewegung



Kleine Partikel führen in einer Flüssigkeit zufällige Zitterbewegungen aus (*Brownsche Bewegung*). Einstein erklärte sie 1905 durch *Zusammenstöße* mit den *Molekülen* der Flüssigkeit, die *Fluktuationen* nach den *Gesetzen der statistischen Mechanik* im Sinne von *Boltzmanns Wärmetheorie* ausführen.

Dennoch betonte Einstein, *„dass die Gesetze der phänomenologischen Wärmelehre nur angenäherte Gültigkeit besitzen.“* Zum *2. Hauptsatz* heißt es: *„Die Durchschnittsgesetze der Erfahrung täuschen uns also nach Boltzmann die Nichtumkehrbarkeit der thermischen Prozesse vor.“*

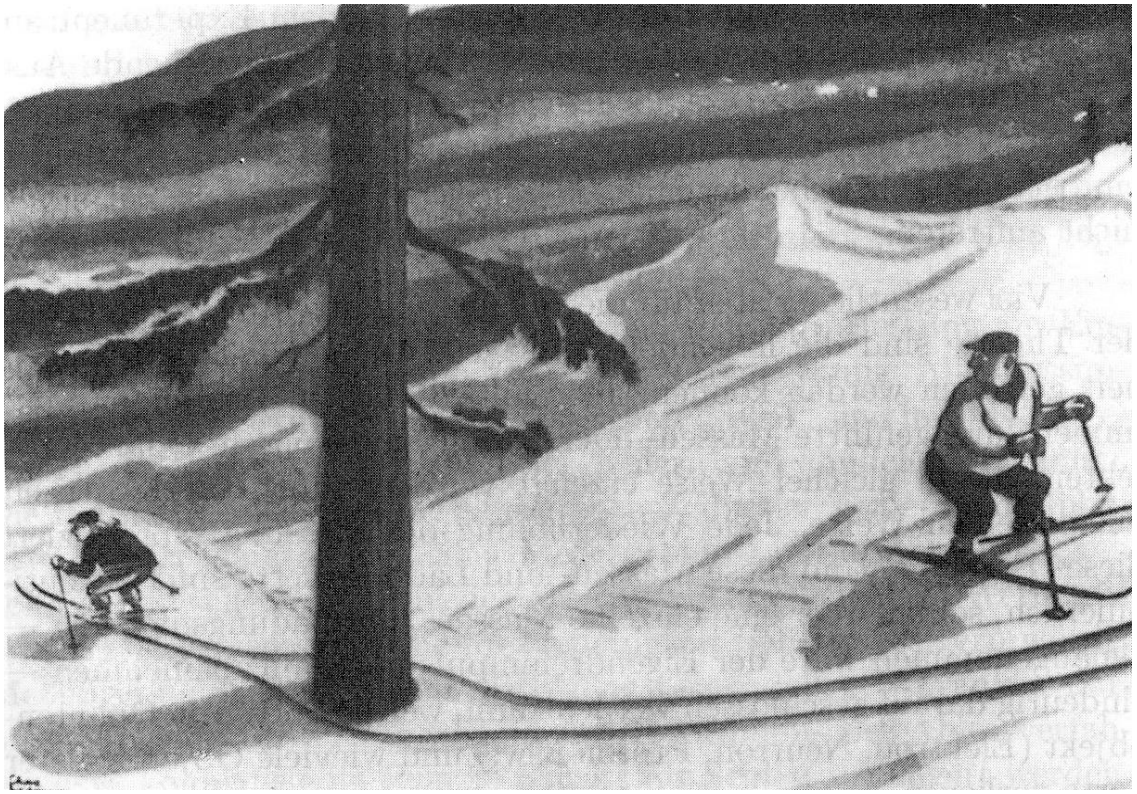


Welle-Teilchen Dualismus im Doppelspaltexperiment

Ein *Quantensystem* (z.B. Elektron) ist *weder* ein *klassischer Körper* (A) mit *eindeutig voraussagbarem Ort* des Auftreffens auf Schirm S noch eine *klassische Welle* (B) mit *ständigem Interferenzmuster* hinter dem Doppelspalt.

Es lässt sich nur eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung (Schrödingers Wellenfunktion)* für den Ort des Auftreffens angeben. Selbst *einzelne Teilchen* erzeugen hinter dem Doppelspalt ein *Interferenzmuster*.

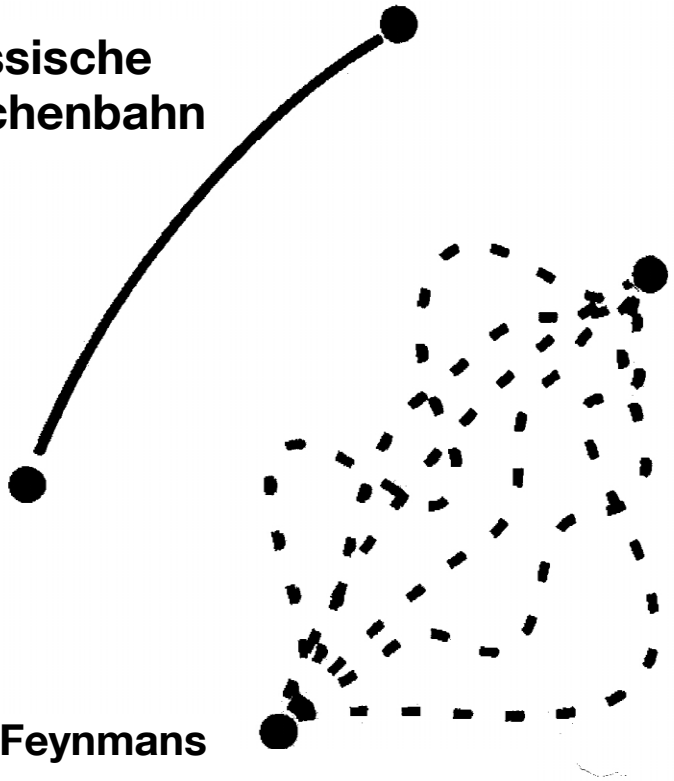
Gedankenexperiment vom nicht-klassischen Skiläufer



Wenn es sich bei *Beugungsphänomen* am *Doppelspalt* um die *Ausbreitung klassischer Teilchen längs Bahnen* handeln würde, so müsste ein *einzelnes Teilchen* irgendwie *beide Spalten* passieren.

Darüber wären wir so verblüfft, wie der *klassische Skiläufer* (rechts) über die Bahnen des *nicht-klassischen Skiläufers* (links).

Wahrscheinlichkeitsdeutung von Quantenzuständen



Nach Feynmans Pfadintegralmethode folgt ein Teilchen jeder möglichen Bahn.

An die Stelle *klassischer Zustände* (z.B. Ort und Impuls einer Kugel) mit *zeitlich eindeutig bestimmter Entwicklungsbahn* treten *Quantenzustände* mit *Wahrscheinlichkeitsverteilung* für alle möglichen Wege eines *Quantensystems* (z.B. Elektron) zwischen Ausgangs- und Zielort. Sie enthalten die *vollständige Information* über den Zustand eines Quantensystems.

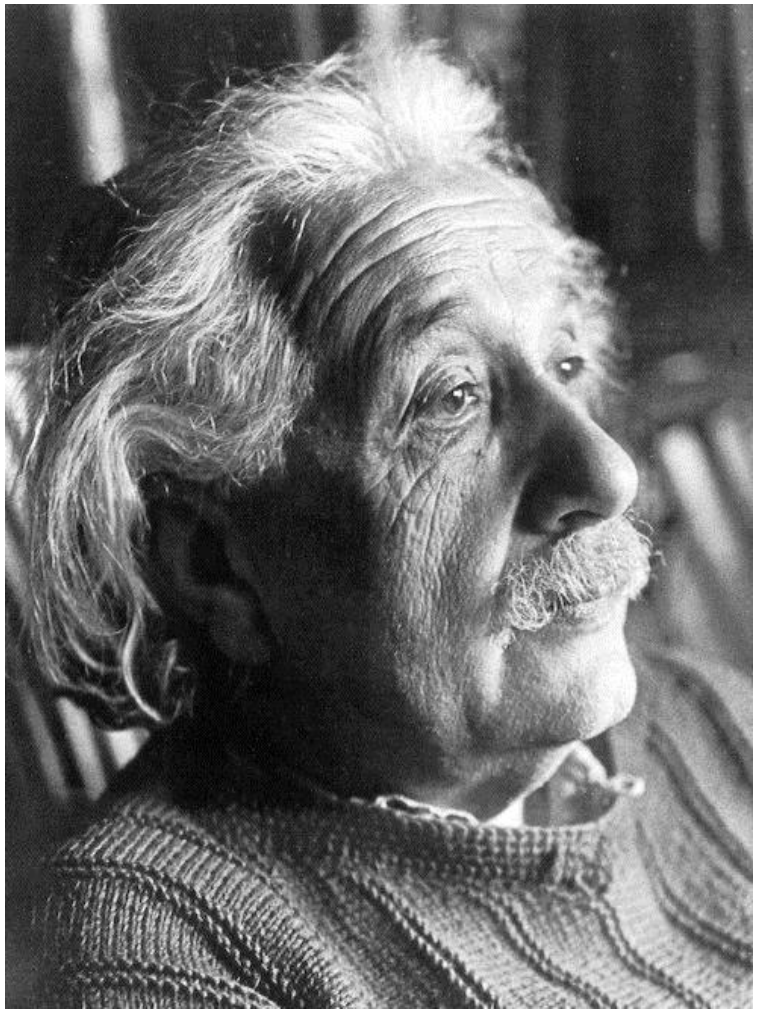
Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation

Nach *Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation* (1927) lässt sich z.B. *Ort x* und *Impuls p* eines *Quantensystems* nicht gleichzeitig mit *beliebiger Genauigkeit* messen:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h/4\pi$$

Wird *Ort x* mit Präzision Δx gemessen, dann streuen die Messwerte von *Impuls p* mit Δp und umgekehrt in Abhängigkeit von *Plancks Konstante h*. Das gilt auch für konjugierte Größen wie z.B. *Zeit* und *Energie*.

Einsteins Determinismus



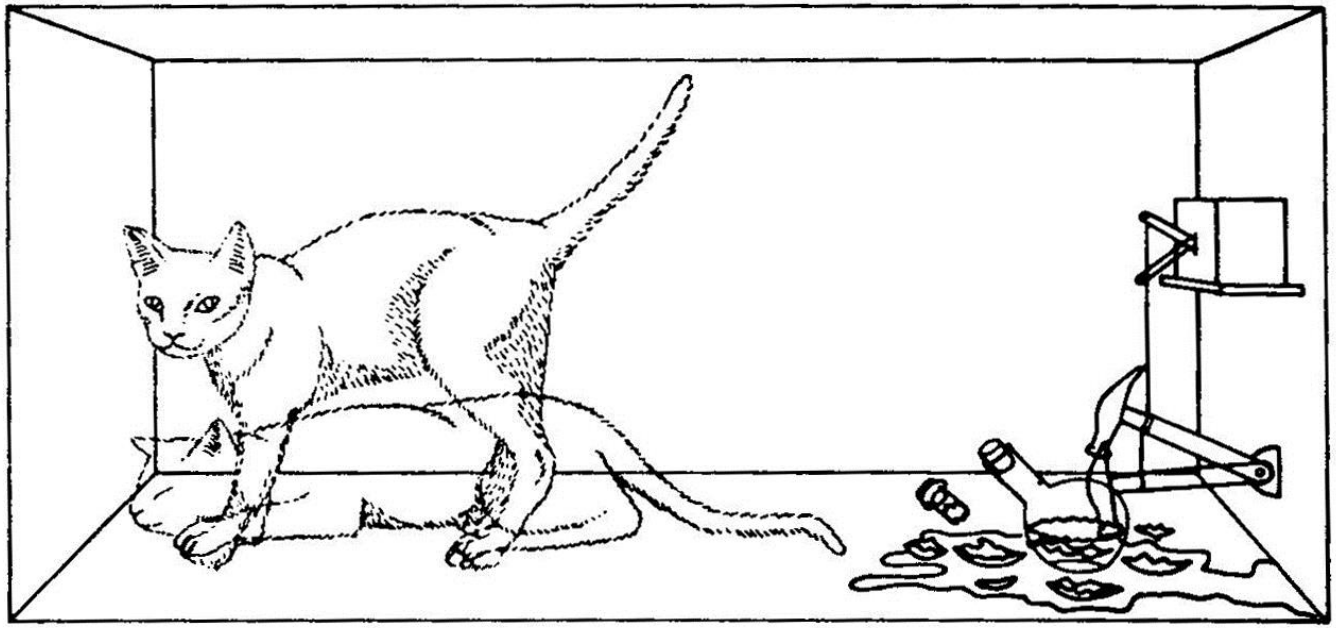
„Gott würfelt nicht!“

Die Einstein-Bohr-Debatte (1935): *Realität oder „Spuk“?*

Klassisch **können zwei Körper (z.B. Sonne und Erde) immer** ***unabhängig*** **von einander** ***vollständig*** **und** ***eindeutig determiniert*** **werden (*Lokalität*).**

In der *Quantenmechanik* gibt es *„verschränkte“* (d.h. nicht separierbare bzw. nicht faktorisierbare) *Zustände* von Teilchen, die *keine getrennten Bestimmungen* der Teilchen zulassen, obwohl sie in *entfernten Bereichen des Raumes* liegen (*Nichtlokalität*). Einstein kritisierte diese *„Fernwirkung“* als *„Spuk“*.

Schrödingers Gedankenexperiment (1935): *Verschränkte Zustände und Schrödingers Katze*

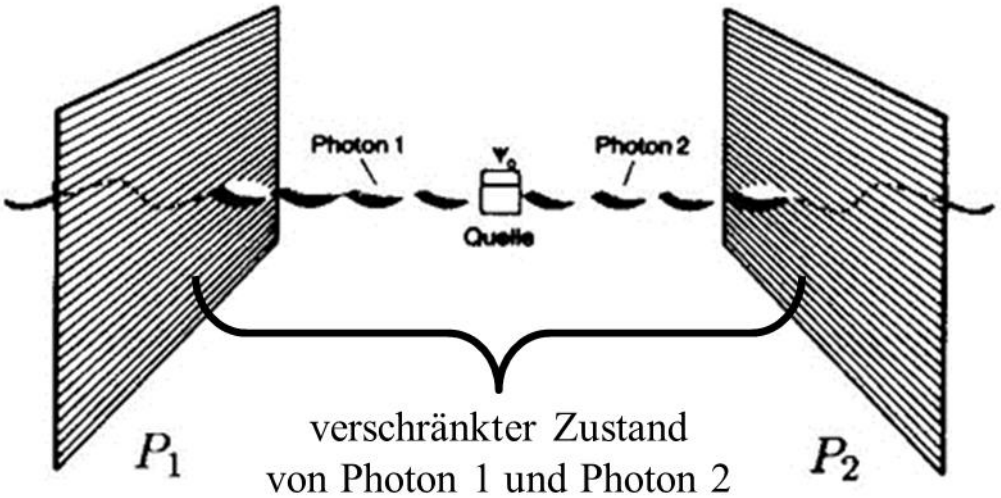


Ein radioaktives Präparat *(Quantensystem)* und eine *Katze* befinden sich in einem geschlossenen Kasten. Der *Zerfall des Präparats* löst einen Hammermechanismus aus, der eine Blausäureflasche zertrümmert und damit die Katze *tötet*.

Die *Zustände* der *Katze ‚tot‘* bzw. *‚lebendig‘* zeigen die *Zustände ‚zerfallen‘* bzw. *‚nicht zerfallen‘* des *Quantensystems* an, das mit einer *Wahrscheinlichkeit* 1:2 zerfällt. *Schrödingers Gleichung* sagt daher einen *verschränkten Gesamtzustand* voraus, in dem die *Katze* zu *gleichen Teilen* tot und lebendig ist. Beim *Öffnen des Kastens* (*‚Messprozess*) ist die *Katze entweder tot* oder *lebendig*, d.h. der Gesamtzustand zerfällt *irreversibel* in einen Teilzustand („*Kollaps der Wellenfunktion*“).

Einstein-Podolski-Rosen (EPR)-Gedankenexperiment (1935):

Lokalität oder Nichtlokalität ?



***Photonenpaare*, die aus einer Quelle auseinander fliegen, seien in einem *Gesamtzustand* verschränkt. Die *Polarisationen* der *einzelnen Photonen* seien *unbestimmt*, aber *zueinander senkrecht*. Nach Verlassen der Quelle findet *keine Wechselwirkung* statt.**

Bei der *Messung* einer *senkrechten* bzw. *waagerechten Polarisation* am *ersten Photon* lässt sich daher die *entgegengesetzte Polarisation* am *zweiten Photon* voraussagen. Nach *Einsteins Lokalitätsprinzip* muss *vor* der Messung die *Polarisation des zweiten Photons festgelegen* haben, da keine Wechselwirkung stattfand. Nach der *Quantenmechanik* wird die *Polarisation* des *entfernten Photons* im Augenblick der Messung des ersten Photons aufgrund des *verschränkten Zustands* festgelegt (*Nichtlokalität*).

Vom Gedankenexperiment zum Laborexperiment:

Die nichtlokale Realität der Quantenwelt

Aus Einsteins *Lokalitätsannahme* folgen *Voraussagen* (*Bellsche Ungleichung*), die der *Quantenmechanik* und *Messungen widersprechen*. Damit gilt die *Nichtlokalität der Quantenmechanik* mit der Existenz *verschränkter Zustände* als bewiesen.

Die *instantane Beeinflussung* des Photons 2 durch die Messung von Photon 1 an einem entfernten Ort widerspricht nicht der *relativistischen Gleichzeitigkeit*, die von der endlichen Lichtgeschwindigkeit abhängt. Tatsächlich findet *keine zeitabhängige „Übertragung“* statt, sondern es liegt ein *über den Raum verteilter verschränkter Gesamtzustand* der beiden entfernten Photonen vor.

2. Interpretationen der Quantenmechanik

Postulate der Quantenmechanik

<u>Zustand</u>: Der *Zustand* eines physikalischen Systems zu einem *Zeitpunkt* t_0 wird durch die Angabe eines zum *Zustandsraum* $\mathcal{H}$ gehörenden *komplexen Zustandsvektors* $|\,\psi(t_0)\,\rangle$ definiert. *Vektoren*, die sich nur um einen von Null verschiedenen Faktor $c \in \mathbb{C}$ unterscheiden, beschreiben *denselben Zustand*. Der *Zustandsraum* des Systems ist ein *Hilbertraum*.

<u>Observable</u>: Jede Größe A, die physikalisch „*gemessen*“ werden kann, ist durch einen im *Zustandsraum* wirkenden *hermiteschen Operator* $\hat{A}$ beschrieben. Dieser *Operator* wird als *Observable* bezeichnet und hat ein *reelles Spektrum* mit einer vollständigen Spektralschar, bestehend aus einem „*diskreten*“ Anteil mit *Eigenvektoren* und *Eigenwerten* (Punktspektrum) und aus einem *Kontinuum*.

<u>Messresultat</u>: Resultat der *Messung* einer physikalischen Größe A kann nur einer der *Eigenwerte* der entsprechenden Observablen $\hat{A}$ sein oder bei *kontinuierlichem Spektrum* des Operators eine messbare Menge aus dem *Kontinuum*.

<u>Messwahrscheinlichkeit</u> (im Fall eines diskreten nichtentarteten Spektrums): Wenn die *physikalische Größe* A an einem System im Zustand $|\,\psi\,\rangle$ gemessen wird, ist die *Wahrscheinlichkeit* $P(a_n)$, den nichtentarteten *Eigenwert* a_n der entsprechenden *Observable* $\hat{A}$ zu erhalten (mit dem zugehörigen *Eigenvektor* $|\,u_n\rangle$) $P(a_n) = |\,\langle\, u_n|\,\psi\,\rangle\,|^2$. Dabei seien ψ und u_n normiert.

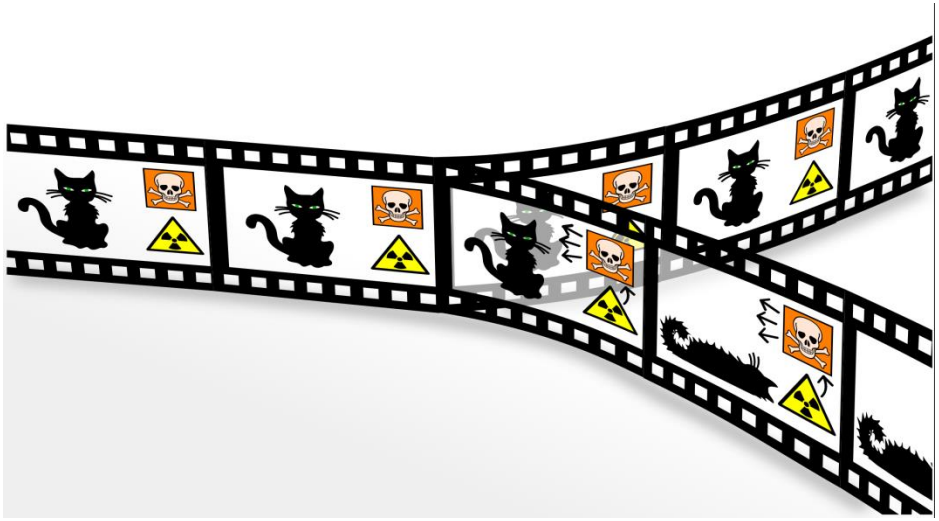
<u>Zeitentwicklung des Zustandsvektors</u>: $|\,\psi\,(t)\,\rangle$ ist gegeben durch die *Schrödingergleichung* $i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\,\psi\,(t)\,\rangle = \hat{H}(t)\,|\,\psi(t)\,\rangle$, wobei $\hat{H}(t)$ die der *Energie* des Systems zugeordnete *Observable* ist.

Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik

Physikalische Theorien **bestehen aus einem** ***Formalismus*** **und einer zugehörigen** ***semantischen Interpretation in Modellen*****. Die** ***Kopenhagener Deutung*** **(Bohrsche Version)** ***verneint*** **die Existenz jeglicher** ***Beziehung*** **zwischen den** ***Grundbegriffen*** **des quantentheoretischen Formalismus und „*realen*“ *Modellen* der Quantenwelt, die über dessen Fähigkeit zur** ***Voraussage von Wahrscheinlichkeiten*** **von** ***Messergebnissen*** **hinausgeht.**

Einzig den durch die Theorie vorhergesagten ***Messwerten*** **(*klassische Begriffe*) wird eine** ***unmittelbare Realität*** **zugewiesen. Der (klassische)** ***Messapparat*** **(als Fortsetzung des menschlichen Erkenntnissubjekts) wird zur „*Bedingung der Möglichkeit*“ (Kant) für die** ***Erkenntnis der Quantenwelt*****.**

Viele-Welten-Interpretation der Quantenmechanik



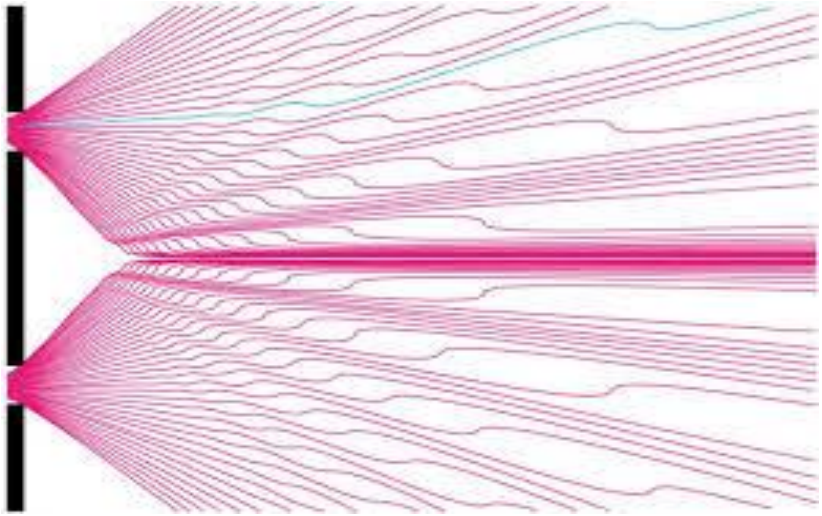
https://de.wikipedia.org/wiki/Viele-Welten-Interpretation

Hugh Everett III. wollte den *Kollaps der Wellenfunktion vermeiden*, um die uneingeschränkte Gültigkeit der *Schrödingergleichung* zu garantieren. Bryce DeWitt bezeichnete die unterschiedlichen *Zustände* des *Quantensystems* nach einer Messung als „*Welten*“.

<u>Vorteil</u>: Sie löst den *Widerspruch* (Kopenhagener D.: „*Komplementarität* “) zwischen der *reversiblen* und *deterministischen Entwicklung* des *Zustandes* (*Schrödingergleichung*) in einem *unbeobachteten System* und die *sprunghafte, irreversible* und *nichtlokale Änderung* des *Zustandes* bei einer *Messung* auf.

<u>Nachteil</u>: Die *Wellenfunktion* verzweigt sich in *getrennte Zustände* im *Zustandsraum*. Sie nimmt also *ontologisch nicht beobachtbare Zustände* in Kauf.

De Broglie-Bohmsche Mechanik



Die *Bohmsche Mechanik* ist eine *deterministische Erweiterung der Quantenmechanik*, die das *Messproblem vermeidet*: Ein System wird *nicht* durch die *Wellenfunktion* (ψ) allein beschrieben, sondern durch das *Paar* aus *Wellenfunktion* und den *Teilchenorten* (Q_i) der jeweiligen Objekte (Elektronen, Atome usw.). Die *Trajektorien* $Q_i(t)$ der Teilchen sind die *verborgenen Parameter* der Theorie mit

zeitabhängiger *Schrödingergleichung* der Quantenmechanik

(1) $$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\,\psi,$$

***Bewegungsgleichung* („*Führungsgleichung*“) für die *Teilchenorte* Q_i**

(2) $$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\nabla_i S}{m_i}.$$

Hier bezeichnet S die *Phase der Wellenfunktion* in der Polardarstellung, also $\psi = R \exp\left(\frac{i}{h} S\right)$. m_i bezeichnet die Masse des i-ten Teilchens und ∇_i den Nablaoperator angewendet auf die Koordinate des i-ten Teilchens.

Ausweg: Dekohärenztheorie?

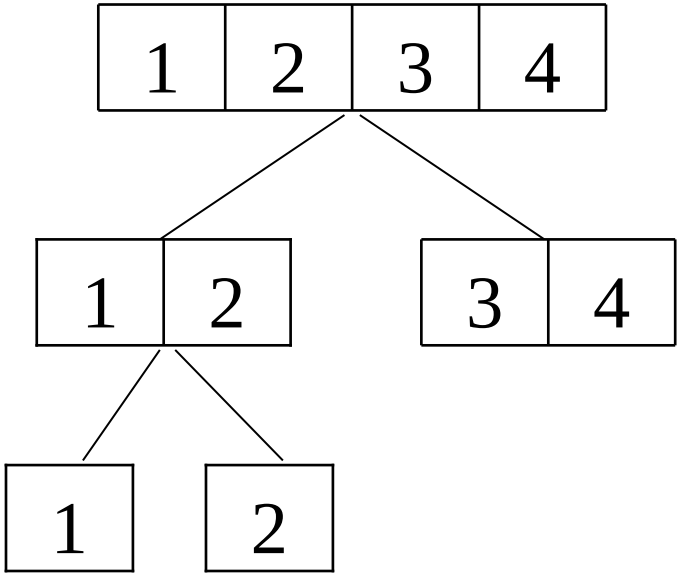
Umgebungseinfluss	Freies Elektron	Staubteilchen $10\mu m$	Bowlingkugel
300 K Normaldruck	10^{-12}	10^{-18}	10^{-26}
300 K Ultrahochvakuum		10^{-4}	10^{-12}
mit Sonnenlicht auf der Erde	10^{-9}	10^{-10}	10^{-18}
mit kosmischer Hintergrundstrahlung (2,73 K)	10^{-9}	10^{-7}	10^{-18}

Dekohärenz ist die _Reduzierung von Kohärenzeffekten_ (_verschränkte Zustände_), wenn ein (isoliertes) System mit seiner _Umwelt wechselwirkt_ (Dissipation). So lässt sich der _Übergang von Quantensystemen_ (mit Kohärenzeffekten) zu (_klassischen_) _makroskopischen Systemen_ (ohne Kohärenzeffekte) erklären (D. Zeh, A. Zeilinger u.a.).

Die _Dekohärenztheorie_ kann jedoch _keine einzelnen Messungen erklären_, sondern macht nur _statistische Aussagen_ über _Ensembles_ aus _mehreren Messvorgängen_. Um zu erklären, warum bei einer _Einzelmessung_ nur ein _einzelnes, bestimmtes Ergebnis_ wahrgenommen wird (Kopenhagener Deutung: „Kollaps der Wellenfunktion“), ist nach wie vor eine weitergehende _Interpretation_ nötig.

3. Grundbegriffe der Quanteninformation

Binärentscheidungen und klassische Information (Bits)



Für N Symbole s_i $(1 \leq i \leq N)$ gibt es $N = 2^I$ Auswahlverfahren mit I Binärentscheidungen. Der *Informationsgehalt eines Symbols* ist die Anzahl von Binärentscheidungen, die zu diesem Symbol führen:

$$I = ld\, N \quad \text{bit.}$$

Falls die Symbole s_i mit *verschiedenen Wahrscheinlichkeiten* p_i, auftreten, ist

$$I(s_i) = ld\, p_i^{-1} = -ld\, p_i \quad \text{bit.}$$

***Beispiel:* Für 4 Symbole gibt es $4 = 2^2$ Auswahlverfahren mit 2 Binärentscheidungen.**

Ein *wahrscheinlicheres Symbol* hat *weniger Informationsgehalt* als ein unwahrscheinlicheres. Der *Informationsgehalt eines Symbols* kann daher als Maß für den Neuigkeitswert des Symbols für den Empfänger aufgefasst werden.

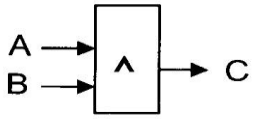
Verschränkte Zustände und Quanteninformation mit einem Bit

"0"	"1"	Qubit
$\updownarrow$ $\lvert V\rangle$	$\leftrightarrow$ $\lvert H\rangle$	Photon: Lineare Polarisation
$\circlearrowleft$ $\lvert L\rangle$	$\circlearrowright$ $\lvert R\rangle$	Photon: Zirkulare Polarisation
$\uparrow$ $\lvert +\frac{1}{2}\hbar\rangle$	$\downarrow$ $\lvert -\frac{1}{2}\hbar\rangle$	Elektron, Neutron, Atomkern: Spin
$\lvert e\rangle$ $\lvert g\rangle$		Atom, Ion: Interne Zustände
$\lvert e\rangle$ $\lvert g\rangle$		Quantenpunkte: Energieniveaus
$\lvert a\rangle$ $\lvert b\rangle$ $\lvert a'\rangle$ $\lvert b'\rangle$		Teilchen: Moden am Strahlteiler

Alternative Quantenzustände **(z.B. vertikal (*V*) und horizontal (*H*) polarisierte Photonen) lassen sich entsprechend *klassischer Bits* 0 und 1 als *Quantenbits (Qubits)*** $|0\rangle$ **und** $|1\rangle$ **auffassen, die *überlagerte Zustände* bilden können:** $|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$

Das *Quantensystem* ist mit *Wahrscheinlichkeit* $|a_0|^2$ **im *Zustand*** $|0\rangle$ **und mit *Wahrscheinlichkeit*** $|a_1|^2$ **im *Zustand*** $|1\rangle$**, wobei** $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1.$

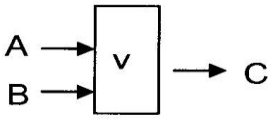
Gatter bzw. elementare und zusammengesetzte Schaltoperationen eines klassischen Computers



A	B	C
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

$C = A \wedge B$

UND-Gatter



A	B	C
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

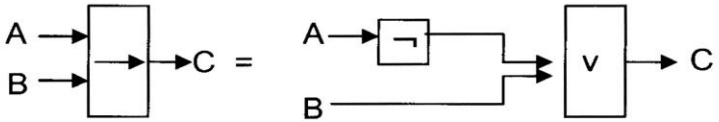
$C = A \vee B$

ODER-Gatter

A	B
0	0

$B = \neg A$

NICHT-Gatter



A	B	C
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

$C = A \rightarrow B$

WENN-DANN-Gatter

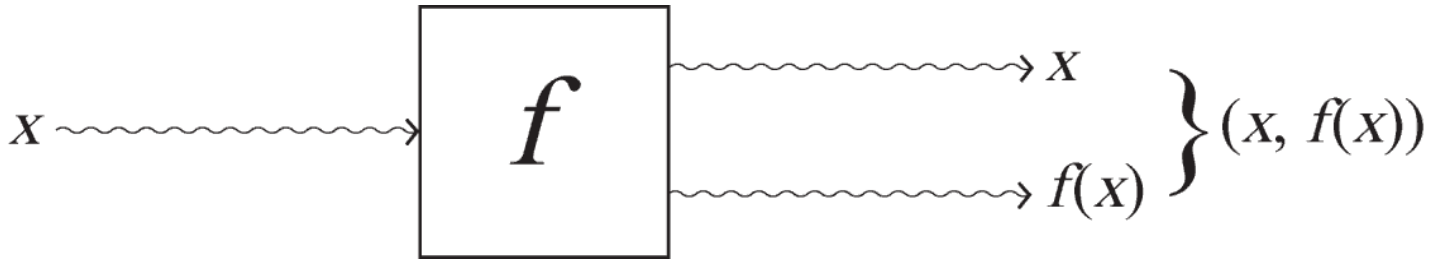
A	B	¬A	¬A v B
0	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1

$C = \neg A \vee B$

Zusammengesetztes ODER-NICHT-Gatter

Reversible Berechnung eines Quantengatters

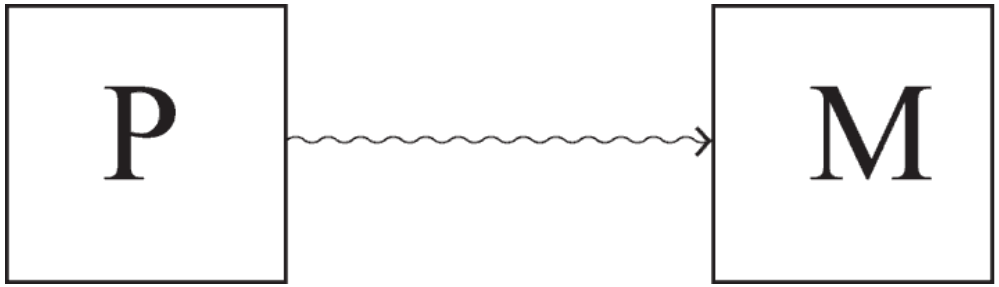
In der Quantenmechanik werden *Superpositionen überlagerter Quantenzustände* durch *unitäre Operatoren* übertragen. Unitäre Operatoren sind aber *im Unterschied zu klassischen Gattern* (z.B. ODER-Gatter) *reversibel*, wonach der Anfangszustand eines Quantensystems rückwärts aus dem Ausgangszustand eindeutig rekonstruierbar ist.



Die *Reversibilität* lässt sich herstellen, indem sich das Gatter quasi den *Input* „*merkt*“ und als *Output* zum berechneten Ergebnis mitliefert. Statt also der Berechnung einer Funktion *f* aus *Input x* mit *Output f*(*x*), tritt nun die Transformation von *Input x* in *Output* (*x*, *f*(*x*)).

Übertragung von Quanteninformation

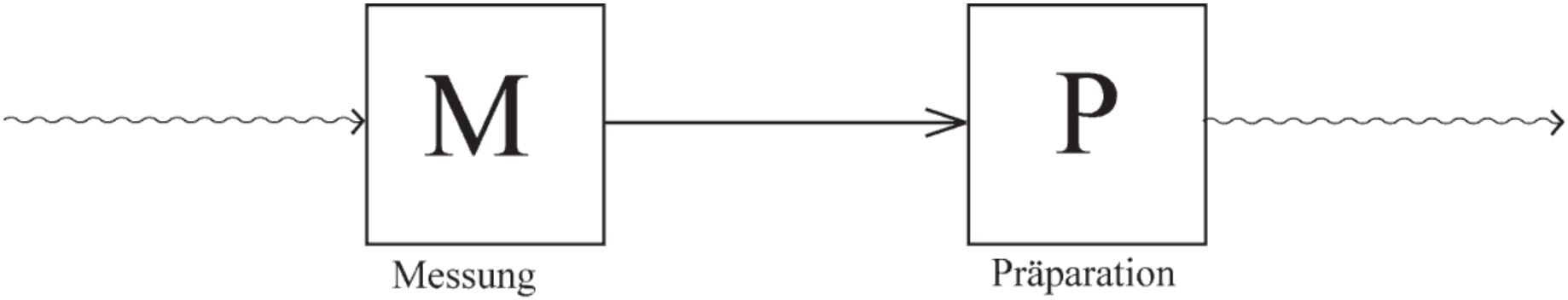
Klassische Information **wird zwischen** ***Sendern*** **und** ***Empfängern*** **übertragen. In der** ***Quantenmechanik*** **entspricht der** ***Sender*** **der** ***Präparation*** **P eines** ***Quantensystems*****, der** ***Empfänger*** **seiner** ***Messung*** **M .Die** ***Quantensysteme*** **(z.B. Elementarteilchen), die sich vom** ***präparierten Zustand*** **eines Experiments zur Messung entwickeln, überbringen in diesem Sinn eine** ***Information*****.**



An dem immer gleichen Versuchsaufbau mit ***Präparation*** **P des** ***Anfangszustands*** **eines** ***Quantenteilchens*** **und** ***Messung*** **M seines** ***Endzustands*** **können** ***wiederholte Experimente*** **ausgeführt werden . Für eine solche** ***Messreihe*** **werden dann die** ***relativen Häufigkeiten der Versuchsergebnisse*** **notiert und als Grundlage für** ***statistische Vorhersagen*** **verwendet. Sollte es zu groben** ***Abweichungen vom typischen Verhalten einer Zufallsfolge*** **kommen, gilt die** ***Messung*** **als** ***fehlgeschlagen*****.**

Klassische Teleportation von Quanteninformation in klassische Information und zurück

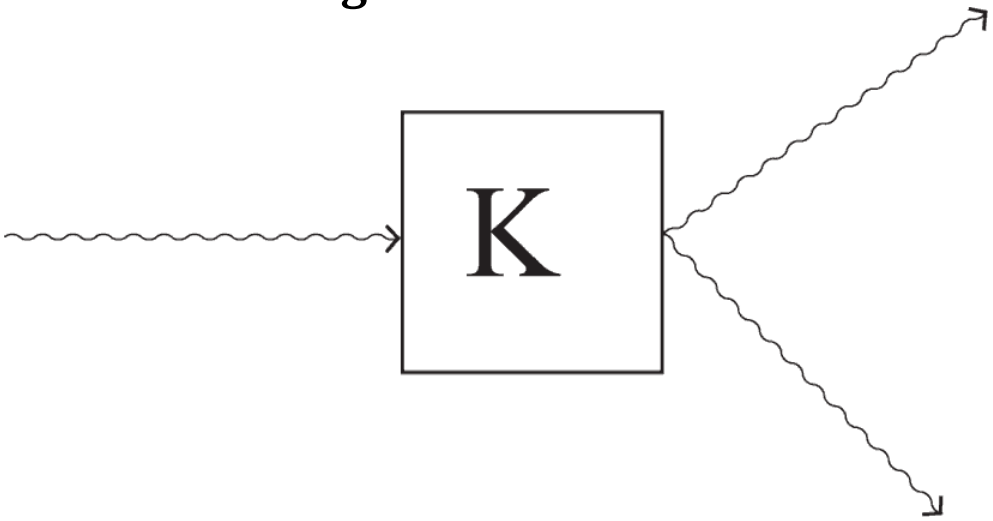
***Quanteninformation* hängt wesentlich von den *statistischen Zufallsgesetzen der Quantenmechanik* ab. Sie ist daher eine *neue Art von Information* und lässt sich *nicht verlustfrei in klassische Information* übersetzen.**



Bei einer *Teleportation* von *Quanteninformation* in *klassische Information* und *zurück* müsste zunächst eine *Messung* M am *Quantenteilchen* als *Träger der Quanteninformation* (*Wellenlinie*) vorgenommen werden. Die dabei gewonnenen *klassischen Daten* (*gerader Pfeil*) würden an einen *Empfänger* P übermittelt, der ein *neues Quantenteilchen* (*Wellenlinie*) präpariert.

Unmöglichkeit eines Quantenkopierers

Ein *Quantenkopierer* würde *ein* Quantenteilchen aufnehmen und *zwei ebensolche* ausgeben.

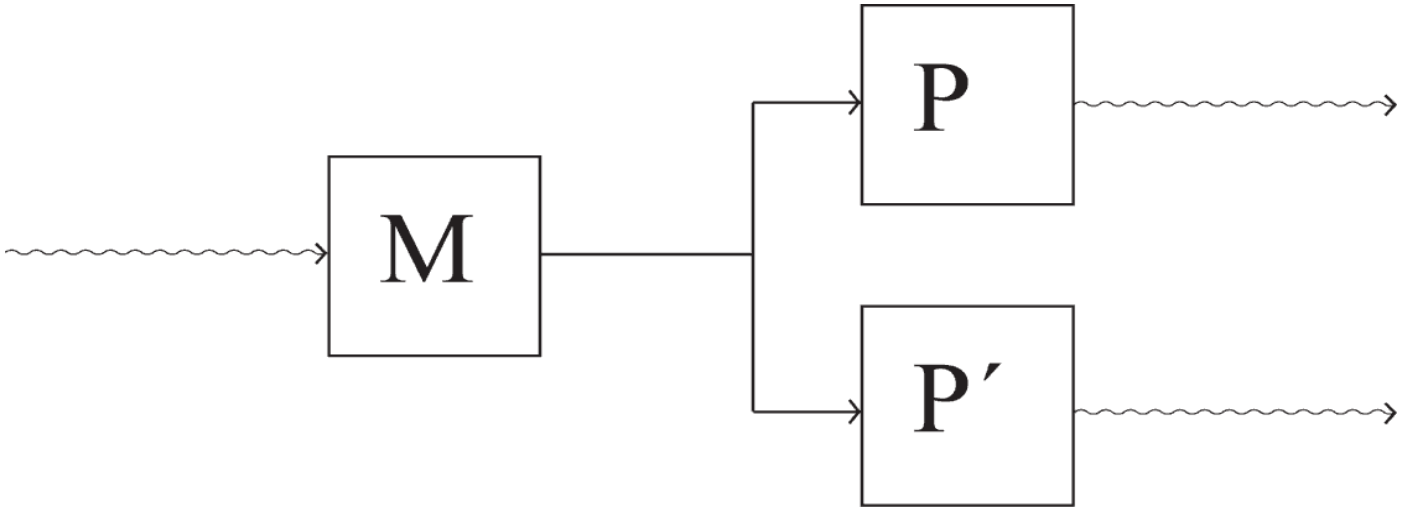


Der Grund für die *Unmöglichkeit eines Quantenkopierers* hängt nun unmittelbar von der *Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation* ab, wonach bestimmte Größenpaare wie z.B. *Ort* und *Impuls* von einem Quantenteilchen *nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit* gemessen werden können. *Quanteninformation* kann also *nicht kopiert* werden (*no-cloning Theorem*):

Gäbe es nämlich einen *Quantenkopierer*, dann könnten wir von einem *Quantenteilchen zwei Kopien* herstellen, um an der einen *Kopie* den *Impuls* und *getrennt davon* an der *anderen Kopie* den *Ort* mit *beliebiger Genauigkeit* zu messen.

Quantenkopierer mit klassischer Teleportation

Mit der *Unmöglichkeit eines Quantenkopierers* ergibt sich sofort auch die *Unmöglichkeit einer klassischen Teleportation*. Mit einer *klassischen Teleportation* lässt sich nämlich ein *Quantenkopierer* leicht konstruieren:



In einer *klassischen Teleportationsstrecke* könnten wir die *übertragene klassische Information* mit einem *klassischen Computer beliebig kopieren*. Diese *Kopien* könnten dann an *Empfänger* P und P' übermittelt werden, die *neue Quantenteilchen präparieren*. Dieses System leistet *dieselbe Aufgabe* wie der *Quantenkopierer*.

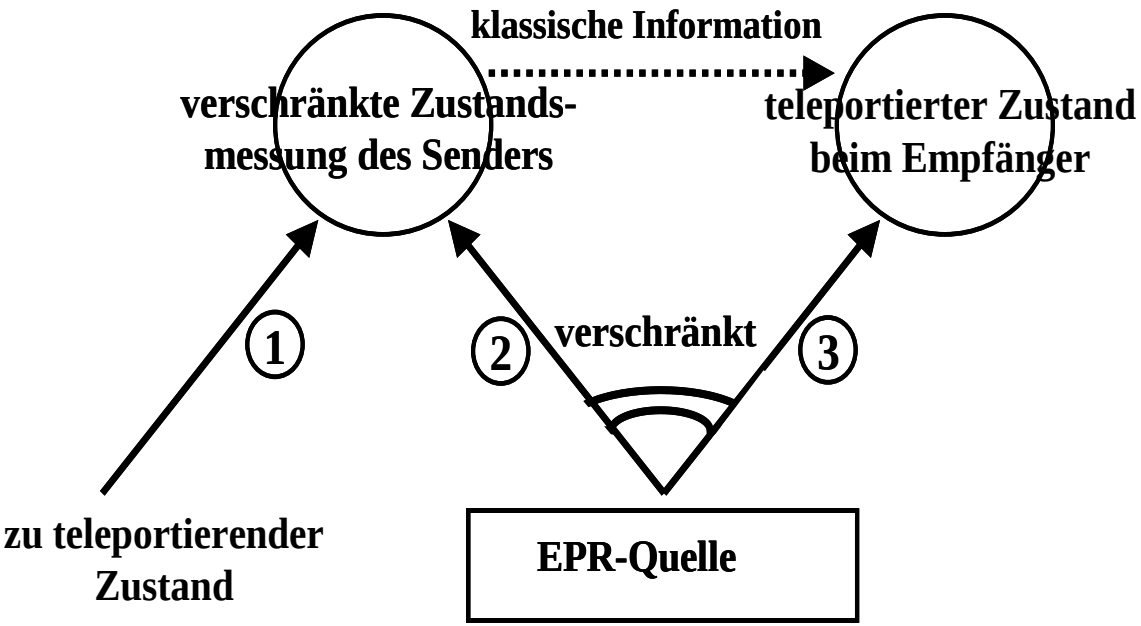
Verschränkte Zustände und Quanteninformation mit mehreren Bits

Entsprechend zu Kombinationen mehrerer klassischer Bits z.B. 00, 01, 10, 11 lassen sich auch für kombinierte Qubits $|0\rangle_1|0\rangle_2, |0\rangle_1|1\rangle_2, |1\rangle_1|0\rangle_2, |1\rangle_1|1\rangle_2$ verschränkte Zustände angeben, deren Teilzustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten:

$$|\psi^+\rangle = 1/\sqrt{2}\left(|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2\right)$$
$$|\psi^-\rangle = 1/\sqrt{2}\left(|0\rangle_1|1\rangle_2 - |1\rangle_1|0\rangle_2\right)$$
$$|\phi^+\rangle = 1/\sqrt{2}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2\right)$$
$$|\phi^-\rangle = 1/\sqrt{2}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2 - |1\rangle_1|1\rangle_2\right)$$

Bei z.B. ψ^- liegen beide Qubits in *entgegengesetzter Einstellung* vor: *Beobachtung* von Qubit 1 mit Wert 0 führt zu *Beobachtung* von Qubit 2 mit Wert 1 und umgekehrt. *Verschränkte Zustände* lassen sich durch *Manipulation* von *nur einem Teilchen* ineinander überführen: z.B. $|\phi^+\rangle \rightarrow |\phi^-\rangle$ von *Qubit* 1 mit *Werten* 0→0 und 1→-1.

Nichtlokalität und Quantenteleportation



Verschränkte Zustände **erlauben** ***instantane Quantenteleportation*** **von** ***Quanteninformation*** **an** ***entfernte Empfänger*****. Dazu benutzt der** ***Sender*** **Teilchen 2 und der** ***Empfänger*** **Teilchen 3 einer** ***EPR-Quelle*****. Beide seien im Zustand** $|\psi^-\rangle$**, also** ***entgegengesetzt verschränkt präpariert*****.**

Der ***Sender*** **kennt den** ***zu sendenden Zustand*** **von** ***Teilchen*** **1** ***nicht*****,** ***misst*** **aber seine** ***Korrelation*** **mit** ***Teilchen*** **2. Liefert die** ***Messung*** **z.B.** ψ^-**, dann sind die Zustände** $|\psi\rangle$ **von 1 und 2 ebenso** ***entgegengesetzt*** **wie die Zustände 2 und 3. Also sind die** ***Zustände*** **von 1 und 3** ***gleich*** **und gelten als** ***übertragen*****. Im Fall der übrigen** ***Bellschen Zustände*** **muss der Empfänger sein Qubit** ***manipulieren*****, um den** ***Ausgangszustand*** **zu erhalten.**

Quantenteleportation und Informationsübertragung

Der *Haken an der Quantenteleportation* besteht darin, dass die *zu sendende Quanteninformation* (Teilchen 1) *unbekannt* ist und sich erst durch den *Zufall einer Messung* entscheidet. *Quantenteleportation* kann daher *nicht zur direkten Informationsübertragung* verwendet werden (Relativitätstheorie: Lichtgeschwindigkeit).

Unter Ausnutzung des *Quantenparallelismus* sind aber gigantische *Steigerungen* der *Rechengeschwindigkeit* und *Rechenkapazität* denkbar, solange es in einem Quantencomputer nur um *unbeobachtete Übertragung* und *Verarbeitung* von *Quanteninformation* geht.

Beim *Auslesen* des *Outputs* findet eine *Messung* und damit die *zufällige Festlegung* einer *Bitsequenz* statt. Um ihre *Wahrscheinlichkeit* zu *bestimmen*, müsste der *Rechenvorgang sehr oft wiederholt* werden.

Quantenparallelismus

Ein *klassischer Computer* verarbeitet *Informationen* durch Manipulation von Bits mit *Gattern*: z.B. Nicht-Gatter auf die Bitfolge [010111] ergibt die Bitfolge [101000].

Im *Quantencomputer* befindet sich *ein Qubit* (vor jeglicher Messung) in einem *Superpositionszustand*
$|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ **mit** $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

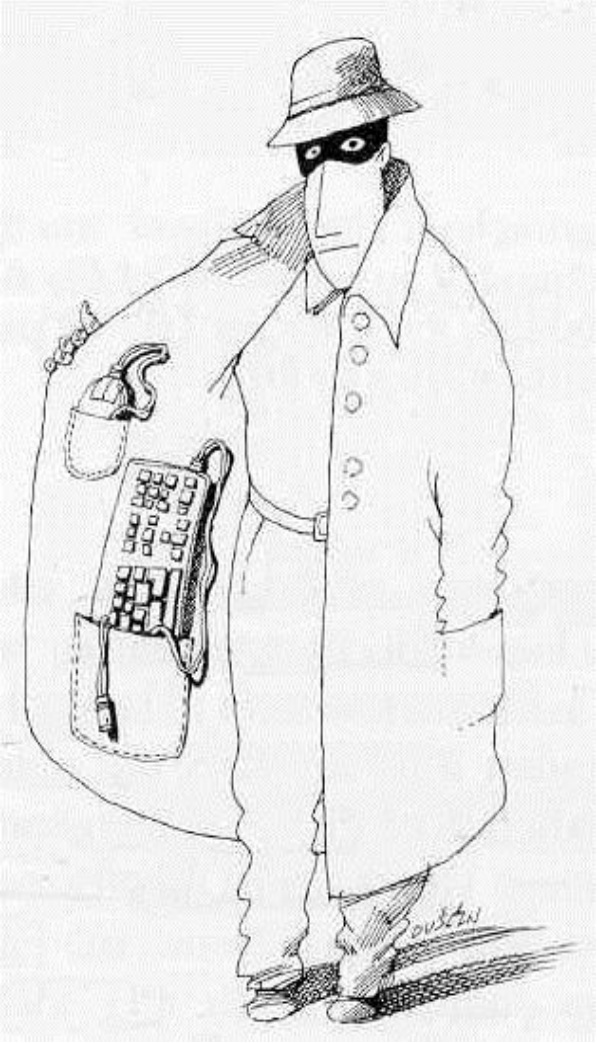
Nach Anwendung einer Gatteroperation (z. B. NOT) ergibt sich
$|\psi'\rangle = a\,|1\rangle + b\,|0\rangle$,
d.h. bei *einmaliger* Anwendung von *einer Gatteroperation* wurden bereits *zwei Manipulationen* durchgeführt.

Für einen (*verschränkten*) Zustand *zweier Qubits*

$|\psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|10\rangle + c\,|01\rangle + d\,|11\rangle$ **ergibt NOT das Ergebnis**
$|\psi'\rangle = a\,|11\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|00\rangle$.
Bei der Nutzung zweier Qubits werden also insgesamt *vier Manipulationen* durch *eine einzige Gatteroperation* durchgeführt. Verallgemeinert werden also bei der Nutzung von *n Qubits* durch *eine Gatteroperation* 2^n *Manipulationen* vorgenommen.

Sicherheit und Kommunikation in der Quantenwelt

Sicherheit durch Zufall?



In der *Kryptographie* werden *Informationen* vom *Sender* zum *Empfänger* übertragen, die durch einen *geheimen Schlüssel* kodiert sind. Schlüssel können aus *Zahlenfolgen* bestehen, die zu den *Zahlenkodes* der *Information addiert* werden.

Der Mathematiker G. Vernam (1890-1960) bewies, dass ein *Verschlüsselungsverfahren* sicher ist, wenn 1) der *Schlüssel* aus einer reinen *Zufallsfolge* besteht und 2) nur *ein einziges Mal* verwendet wird.

Wird eine *Zufallsfolge z* für *zwei Nachrichten a* und *b* verwendet, dann lässt sich die *Differenz* $(a+z)-(b+z) = a+b$ berechnen und daraus *durch Kombination sinnvolle Nachrichten a* und *b* finden.

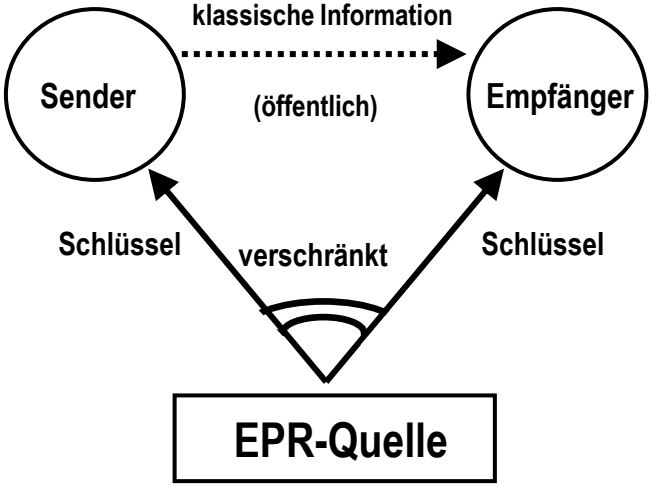
ABER:

⇨ ***Theoretisch* lässt sich prinzipiell *nicht entscheiden*, ob ein *Programm* das *kürzeste* zur Erzeugung einer Sequenz ist.**

⇨ ***Praktisch* kann ein (deterministisches) *Programm per definitionem nur Pseudo-Zufallsfolgen* erzeugen, da es *regelabhängig* ist.**

⇨ **In der *Quantenwelt* gibt es aber *Zufallsprozesse*, die verborgene Regeln ausschließen.**

Zufallsfolgen und Quantenkryptographie



Mit einer *EPR-Quelle* wird eine *Folge verschränkter Paare von Bits gleichzeitig* an *Sender* und *Empfänger* geschickt, die durch *Messungen* in *zwei identische Zufallsfolgen* verwandelt und als *gemeinsamer Schlüssel* verwendet werden können: Das *Sicherheitsproblem* eines Schlüsselaustauschs entfällt.

<u>Beispiel</u>:

1111100000	Nachricht
1010110010	Schlüssel
0101010010	Verschlüsselte Nachricht

(mit 1+1=0)

Der *Empfänger* subtrahiert Bit für Bit seines Schlüssels nach der Regel 0-1=1 (Umkehrung von 1+1=0)

***Abhören des Schlüssels* („*Messung*“) führt zu *seiner Veränderung*. Sie wird von *Sender* und *Empfänger* entdeckt, indem sie *ständig* die *Zustände* (z.B. Orientierung des Polarisators für Photonenpaare) *ändern* und die *Schlüsselabweichungen* durch *Stichproben* entdecken, die über einen *öffentlichen Kanal* ausgetauscht werden.**

4. Quanteninformatorische Interpretation der Quantenmechanik

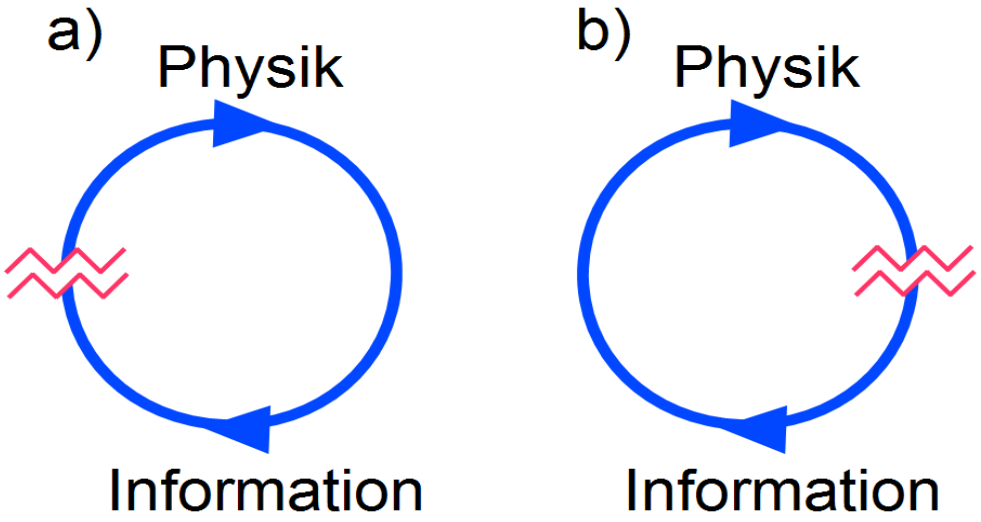
Digitale Physik: *It from Bit* ?

John Archibald Wheeler (1911-2008) formulierte *fünf grundlegende Fragen*, die über die Physik hinausreichen („really big questions“) :

- **Wie kommt es zu dem, was existiert? (*How come existence*?)**
- **Warum gibt es Quanten? (*Why the quantum*?)**
- **Haben wir teil am Universum? (*A participatory universe*?)**
- **Was führt zur Bedeutung? (*What makes meaning*?)**
- **Das Seiende aus Informationen? (*It from bit*?)**

Information und Physik

Beruht a) *Information auf Physik* (z.B. Physik der Quanteninformation) oder b) *Physik auf (Quanten-)Information*?



In *informationstheoretischen Rekonstruktionen der Quantenmechanik* (b) hat *Information* den Status einer *physikalischen Fundamentalgröße*.

A. Grinbaum, The Significance of Information in Quantum Theory, PhD 2004

***Quantentheorien* sind in diesen Interpretationen keine Theorien über die Eigenschaften *materieller Objekte*, sondern über die *Darstellung* und *Manipulation* von *Information* (z.B. CHB (Clifton/Bub/Halverson)-Theorem mit (nicht-kommutativen) C*-Algebren; C.F. v. Weizsäckers Ur-Alternative als einer quantentheoretischen Informationseinheit in der Zeit).**

Informationstheoretische Axiome der Quantenmechanik

Axiome	CBH-Interpretation
Axiom 1 („*no signaling*“)	**Es gibt *keine überschnelle Übertragung* von Informationen.**
Axiom 2 („*no broadcasting*“)	**Es ist *nicht möglich*, die *Kopie einer Information* herzustellen, die in einem (nicht nur reinen) Zustand enthalten ist.**
Axiom 3 („*no bit*“)	**Es ist *kein sicheres Bit-Commit-Protokoll* möglich (d.h. 1) Alice sendet ein verschlüsseltes Bit an Bob, 2) Alice sendet Information zur Entschlüsselung).**

***Axiome* werden in einer *C*-Algebra* formuliert, die u.a. mathematische Strukturen der *klassischen Physik* und Variationen der *Quantenmechanik* enthält: *Ableitbar* sind z.B. *Superposition* und *Nicht-Kommutativität der Observablen* (aus Axiom 2), *Verschränkung* (aus Axiom 3), aber *nicht* z.B. *quantenmechanische Dynamik* (d.h. zeitliche Entwicklung des Zustands eines Quantensystems).**

C*-Algebra und Quantenmechanik

Observablenalgebra $\mathcal{O}$ mit Norm $\|A\| := \sup_{\omega} |\omega(A)|$

Messung einer physikalischen Größe : Zustand auf $\mathcal{O}$ (d.h. positives normiertes lineares Funktional $\omega : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$)

Erweiterung von $\mathcal{O}$ zu einer C*-Algebra $\mathcal{A}$:

- *Klassische Physik des Phasenraums*: kommutative C*-Algebra
- *Quantenphysik des Phasenraums*: nicht-kommutative C*-Algebra

C-Algebra* über Körper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$: Banach-Algebra $\mathcal{A}$ mit einer Involution *: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation $[q, p] = i$: Weyl C*-Algebra aus $U(\alpha) = e^{i\alpha q}$ und $V(\beta) = e^{i\alpha p}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ erzeugt

Schrödinger Darstellung: Darstellung der Weyl Operatoren U, V auf Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$ mit $(U(\alpha)\psi)(x) = e^{i\alpha x}\psi(x)$ und $(V(\beta)\psi)(x) = \psi(x+\beta)$

Zeitentwicklung von Observablen $A \in \mathcal{A}$: Automorphismengruppe mit $A \mapsto \alpha_t(A)$ mit $t \in \mathbb{R}$; $U(t) = e^{-iHt}$ für einen unbeschränkten selbstadjungierten Hamiltonoperator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$

C*-Algebren und Banach-Algebren

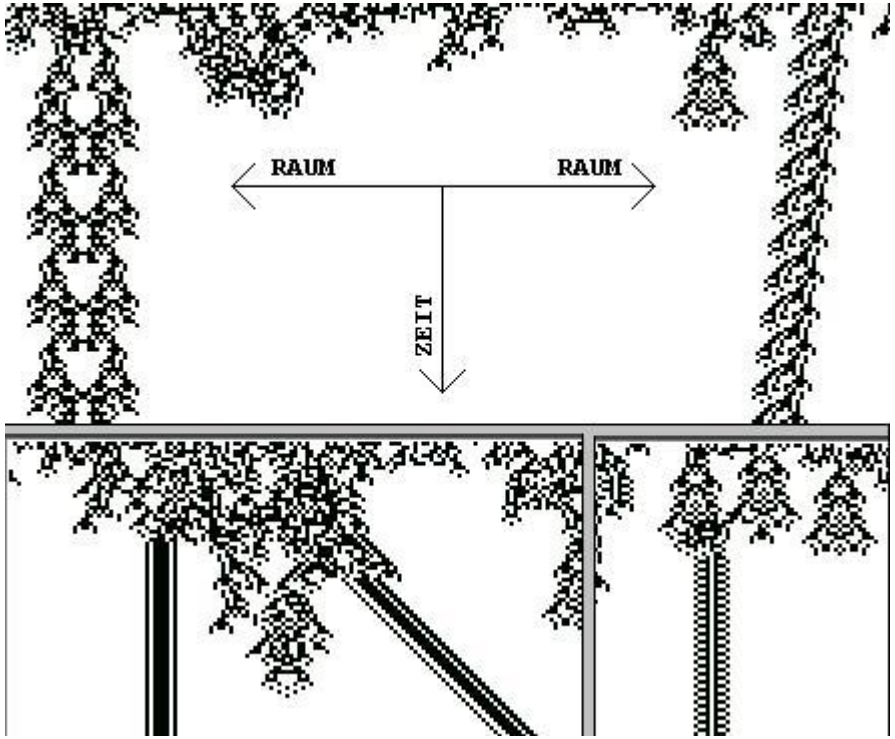
Eine *C*-Algebra* über dem Körper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist eine *Banach-Algebra* $\mathcal{A}$ mit einer *Involution* $*: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, **so dass für alle** $a, b \in \mathcal{A}$ **und** $z, w \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gilt:

1) $(a^*)^* = a$ (*involutiv*)
2) $(ab)^* = b^*a^*$ (*anti-multiplikativ*)
3) $(za+wb)^* = \bar{z}a^*+\bar{w}b^*$ (*semilinear, anti-linear* **oder** *konjugiert linear*)
4) $\|a^*a\| = \|a\|^2$ (*C*-Eigenschaft*)

<u>Beispiel</u>: Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ der *beschränkten linearen Operatoren* auf einem *Hilbertraum* $\mathcal{H}$

In der *Funktionalanalysis* verallgemeinern Banach-Algebren Eigenschaften von *Funktionenräumen* und *Operatorenalgebren* (in der QM z.B. Observablen). Eine *Banach-Algebra* ist ein *Vektorraum* $(\mathcal{A},+)$ über einem Körper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit einer *Norm* $\|\cdot\|$ und einem *Produkt* $\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, so dass gilt:

1) $(\mathcal{A},+, \|\cdot\|)$ ist ein *Banach-Raum* (d.h. vollständiger normierter Vektorraum)
2) $(\mathcal{A},+,\circ)$ ist eine *assoziative* $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ *-Algebra*
3) $\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ (d.h. *Norm submultiplikativ*).



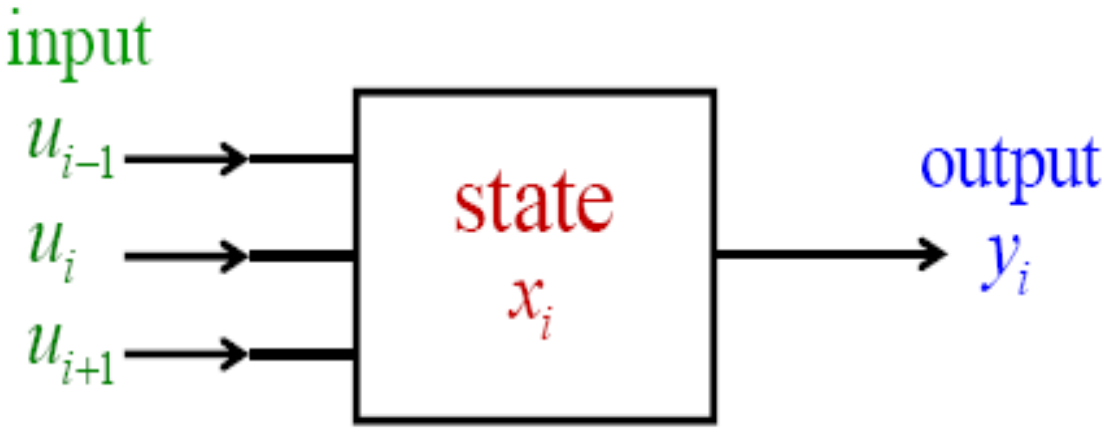
Quantenuniversum als Quantencomputer?

In "*Simulating Physics with Computer*" (1982) regte Richard Feynman einen *universellen Quantencomputer* zur Simulation der Physik an. Das war der Anstoß zur Entwicklung des *Quantencomputers*. Konrad Zuse hatte bereits 1969 in seinem Buch "*Rechnender Raum*" einen *universellen (klassischen) zellulären Automaten* zur *Simulation des Universums* angenommen (S. Wolfram 2002; K. Mainzer/L. Chua 2011)

1985 definierte David Deutsch eine *universellen Quanten -Turingmaschine* und erweiterte die *Church-Turing These* für Quanten-Turingmaschinen (Deutsch 1985):

"Every finitely realizable physical system can be perfectly simulated by a universal model computing machine operating by finite means."

Zelluläre Quantenautomaten



Mainzer/Chua 2011

Ein *klassischer 1-dimensionaler zellulärer Automat* wird durch eine *lokale deterministische Transitionsregel* $y_i = N(u_{i-1}, u_i, u_i)$ definiert, entsprechend einer *Booleschen Wahrheitstafel* mit $8 = 2^3$ 3-stelligen *Inputs* (u_{i-1}, u_i, u_i) und entsprechenden *Outputwerten* y_i.

In der *Quantenversion* wird der *eindeutig determinierte* Wert y_i mit $y_i \in \{0, 1\}$ durch eine *probabilistische Quantenverteilungsfunktion* oder eine *Quantenamplitude* $|x\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ der *Zustände* $|0\rangle$ und $|1\rangle$ mit *komplexen Zahlen* $a, b \in \mathbb{C}$ and $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ersetzt.

Von klassischen zu Quanten-Transformationsregeln zellulärer Automaten

Die *klassische update-Regel N* kann durch eine Abbildung
$N: \underbrace{\Sigma}_{\text{links}} \times \underbrace{\Sigma}_{\text{alt}} \times \underbrace{\Sigma}_{\text{rechts}} \rightarrow \underbrace{\Sigma}_{\text{neu}}$ **mit Σ als Menge der *Zellzustände*, den *alten Zellzuständen*, ihren *linken* und *rechten Nachbarn* und den *neuen Zuständen* illustriert werden.**

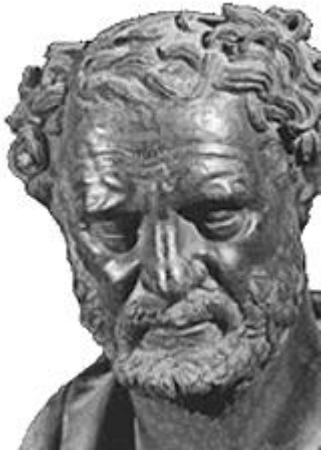
Die *Quanten update- Regel* N_q ordnet *Quantenamplituden jedem möglichen Übergang* von *alten Zuständen* und ihren zwei *linken* und *rechten Nachbarn neue Zustände* durch eine *Abbildung*
$N_q: \underbrace{\Sigma}_{\text{links}} \times \underbrace{\Sigma}_{\text{alt}} \times \underbrace{\Sigma}_{\text{rechts}} \times \underbrace{\Sigma}_{\text{neu}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{C}}_{\text{Amplitude}}$ **mit der Menge $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* zu.**

Mit diesen *lokalen Transitionsamplituden* können die *globalen Transitionsamplituden* von jeder *gegebenen Konfiguration* zu jeder *anderen Konfiguration* durch $N_Q(u, v) = \prod_i N_q(u_{i-1}, u_i, u_i, v_i)$ berechnet werden.

Mit diesen Amplituden kann ein (single-time-step-evolution) *Operator T* auf einem *Hilbertraum* mit Konfigurationen als *Basiselementen* eingeführt werden:

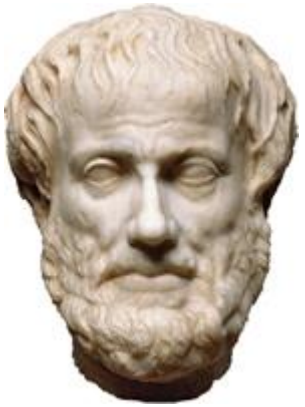
$T|u\rangle = \sum_v N_Q(u, v)|v\rangle$.

Alte und neue Fragen: Diskret oder Kontinuum? Digital oder Analog?



Demokrit: Diskrete Welt

Die Reduktion der (Quanten-) Physik auf *digitale Physik* ist unvereinbar mit der Existenz von *kontinuierlichen Eigenschaften physikalischer Symmetrien* (z.B. Rotationssymmetrie, Translationssymmetrie, Lorentz Symmetrie, elektroschwache Symmetrie, allgemein Eichsymmetrien), alle zentral für gegenwärtige physikalische Theorien.



Aristoteles: Kontinuum

Die bekannten physikalischen Gesetze (einschließlich *Quantenmechanik* und ihre *kontinuierlichen Spektren*) sind mit den *reellen Zahlen* und der *Mathematik des Kontinuums* verbunden:

(Quanten-) Physik benötigt Mathematik jenseits der Turing-Berechenbarkeit.

Wissenschaftstheoretische Bewertung

***Interpretationen* bewähren sich nach „*Kosten-Nutzen*“ Bewertung:**

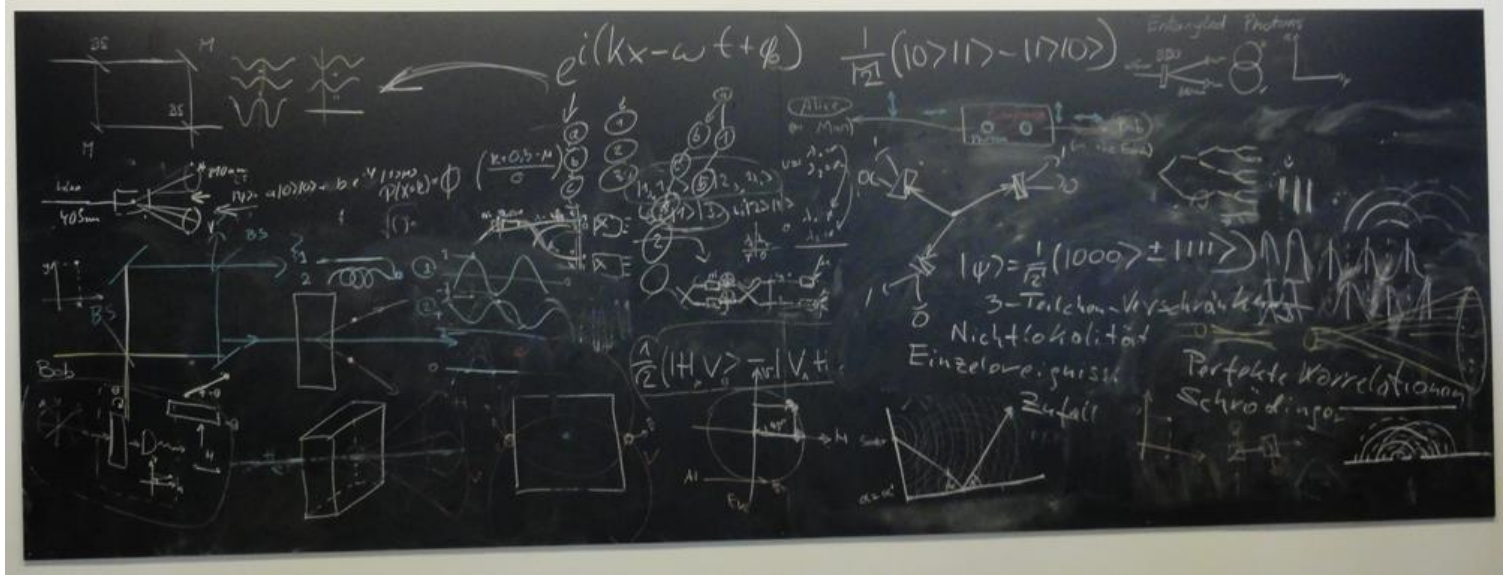
a) <u>Kopenhagener Interpretation</u>: QM als *nicht-lokale* und *indeterministische* (*nicht-kausale*) Theorie
- <u>Vorteil</u>: *Ontologische Sparsamkeit*
- <u>Nachteil</u>: Hypothese des Kollaps der Wellenfunktion (Messproblem)

b) <u>Everett-Interpretation</u>: QM als *nicht-lokale* und *indeterministische* (*nicht- kausale*) Theorie
- <u>Vorteil</u>: *kein Messproblem*
- <u>Nachteil</u>: Hypothese unbeobachtbarer Welten

c) <u>De Broglie-Bohm Mechanik</u>: QM als *nicht-lokale* und *deterministische* (*kausale*) Theorie
- <u>Vorteil</u>: *kein Messproblem, kausale Theorie*
- <u>Nachteil</u>: Theorieerweiterung („ad-hoc Hypothese“)

d) <u>Dekohärenztheorie</u>: QM als *nicht-lokale* und *indeterministische* Theorie
- <u>Vorteil</u>: *kein Messproblem für Ensemble-Messungen* (Dekohärenz)
- <u>Nachteil</u>: Keine Erklärung für Einzelmessung

Quantenmechanik als Informationstheorie ?



A. Zeilinger: Tafelbild

<u>Vorteil</u>:

***Quanteninformation* ist ein *starkes Forschungsparadigma*, das *nicht nur theoretische Rekonstruktionen der Quantenmechanik* ermöglicht, sondern *neue Innovationen* (z.B. Quantenkommunikation, Quantencomputer) eröffnet.**

<u>Nachteil</u>:

***Vollständige Rekonstruktion* (bisher?) *nicht* durchgeführt.**

Alle *Interpretationen der Quantenmechanik* haben einen *wissenschaftstheoretischen Preis*, mit dem sie ihre jeweiligen Vorteile erkaufen:

„There is no free lunch.“