Die Englertsche Dualitätsrelation

Ein quantitativer Blick auf den Welle - Teilchen - Dualismus

Markus Vogt

Albeck - Gymnasium Sulz

Quantenphysik an der Schule
Workshop der Heisenberg - Gesellschaft
Gotha, 23. - 25. Juni 2023

Überblick

Welle - Teilchen - Dualismus qualitativ

Welle - Teilchen - Dualismus quantitativ – Dualitätsrelationen

Herleitung der Englertschen Ungleichung

Bedeutung für den Unterricht

Welle - Teilchen - Dualismus qualitativ

Welle - Teilchen - Dualismus qualitativ

Entweder - Oder - Version

Erscheint bei Interferenzexperimenten mit einzelnen Quantenobjekten ein Interferenzmuster, dann sind die klassisch möglichen Wege der Quantenobjekte von der Quelle zum Detektor ununterscheidbar. Wenn die Wege unterscheidbar sind, verschwindet das Interferenzmuster.

Welle - Teilchen - Dualismus qualitativ

Entweder - Oder - Version

Erscheint bei Interferenzexperimenten mit einzelnen Quantenobjekten ein Interferenzmuster, dann sind die klassisch möglichen Wege der Quantenobjekte von der Quelle zum Detektor ununterscheidbar. Wenn die Wege unterscheidbar sind, verschwindet das Interferenzmuster.

Je - Desto - Version

Je besser sich die klassisch möglichen Wege von Quantenobjekten unterscheiden lassen, desto geringer ist ihre Interferenzfähigkeit. Je besser die Interferenzfähigkeit von Quantenobjekten ist, desto schlechter lassen sich ihre klassisch möglichen Wege unterscheiden.

Welle - Teilchen - Dualismus quantitativ – Dualitätsrelationen

Welle - Teilchen - Dualismus quantitativ – Dualitätsrelationen

Idee: Repräsentiere Unterscheidbarkeit der Wege und Sichtbarkeit von Interferenzmustern durch geeignete mathematisch definierte und quantitativ meßbare Größen $\mathscr{D}$ und $\mathscr{V}$.

Welle - Teilchen - Dualismus quantitativ – Dualitätsrelationen

Idee: Repräsentiere Unterscheidbarkeit der Wege und Sichtbarkeit von Interferenzmustern durch geeignete mathematisch definierte und quantitativ meßbare Größen $\mathscr{D}$ und $\mathscr{V}$.

Für diese lassen sich dann Relationen in Form von Ungleichungen streng herleiten.

Welle - Teilchen - Dualismus quantitativ – Dualitätsrelationen

Pioniere:

D. M. Greenberger, A. Yasin, Physics Letters A **128**, 391, 1988
G. Jaeger, A. Shimony, L. Vaidman, Physical Review A **51**, 54, 1995

Allgemeine Form:

B.-G. Englert, Acta physica slovaca **46**, 249, 1996
B.-G. Englert, Physical Review Letters **77**, 2154, 1996
B.-G. Englert, Zeitschrift für Naturforschung **54a**, 11, 1999

Welle - Teilchen - Dualismus quantitativ – Dualitätsrelationen

Elementarisierung der Herleitung:

T. Qureshi, Progress of Theoretical and Experimental Physics **2013**, 041A01
T. Qureshi, R. Vathsan, Quanta **2**, 58, 2013
T. Qureshi, American Journal of Physics **84**, 517, 2016
R. Vathsan, T. Qureshi, International Journal of Quantum Information **14**, 1640031, 2016

Welle - Teilchen - Dualismus quantitativ – Dualitätsrelationen

Sehr gute experimentelle Absicherung:

S. Dürr, T. Nonn, G. Rempe, Nature **395**, 33, 1998
S. Dürr, T. Nonn, G. Rempe, Physical Review Letters **81**, 5705, 1998
S. Dürr, G. Rempe, Optics Communications **179**, 323, 2000

Dabei zusätzlich Nachweis der Unabhängigkeit von der Heisenbergschen Unschärferelation:
Für Welle - Teilchen - Dualismus ist nicht notwendigerweise Impulsübertrag erforderlich.

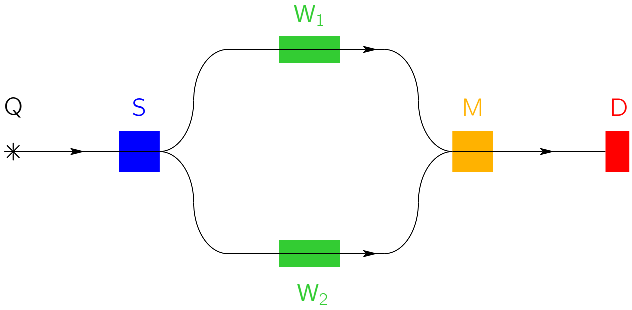
Herleitung der Englertschen Ungleichung

Herleitung der Englertschen Ungleichung

Prinzipieller Aufbau eines Zweiwege - Interferometers

Herleitung der Englertschen Ungleichung

Prinzipieller Aufbau eines Zweiwege - Interferometers



Q: Quelle

S: Splitter M: Merger

W_1, W_2: Weganzeiger

D: Detektor

Herleitung der Englertschen Ungleichung

Zustand des Gesamtsystems Interferometer + Quantebobjekt:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1 \, |w_1\rangle + \psi_2 \, |w_2\rangle \right)$$

$|w_1\rangle \mathrel{\widehat{=}}$ „W_1 meldet ein Quantenobjekt“

$|w_2\rangle \mathrel{\widehat{=}}$ „W_2 meldet ein Quantenobjekt“

$\psi_1 \mathrel{\widehat{=}}$ „Quantenobjekt läuft durch Arm 1“

$\psi_2 \mathrel{\widehat{=}}$ „Quantenobjekt läuft durch Arm 2“

Herleitung der Englertschen Ungleichung

Zustand des Gesamtsystems Interferometer + Quantebobjekt:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1 \, |w_1\rangle + \psi_2 \, |w_2\rangle \right)$$

$|w_1\rangle \,\widehat{=}\,$ „W_1 meldet ein Quantenobjekt“

$|w_2\rangle \,\widehat{=}\,$ „W_2 meldet ein Quantenobjekt“

$\psi_1 \,\widehat{=}\,$ „Quantenobjekt läuft durch Arm 1“

$\psi_2 \,\widehat{=}\,$ „Quantenobjekt läuft durch Arm 2“

Antreffwahrscheinlichkeitsdichte am Detektor:

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{2} \left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \right) + \mathfrak{Re} \left(\overline{\psi_1} \, \psi_2 \, \langle w_1 | w_2 \rangle \right)$$

Herleitung der Englertschen Ungleichung

$|w_1\rangle$ und $|w_2\rangle$ liefern formale Beschreibung der Unterscheidbarkeit der beiden möglichen Wege des Interferometers:

Herleitung der Englertschen Ungleichung

$|w_1\rangle$ und $|w_2\rangle$ liefern formale Beschreibung der Unterscheidbarkeit der beiden möglichen Wege des Interferometers:

Die beiden Wege sind umso weniger unterscheidbar, je ähnlicher die Resultate sind, die ein Auslesen der beiden Weganzeiger W_1 und W_2 jeweils liefern würde.

Herleitung der Englertschen Ungleichung

$|w_1\rangle$ und $|w_2\rangle$ liefern formale Beschreibung der Unterscheidbarkeit der beiden möglichen Wege des Interferometers:

Die beiden Wege sind umso weniger unterscheidbar, je ähnlicher die Resultate sind, die ein Auslesen der beiden Weganzeiger W_1 und W_2 jeweils liefern würde.

Die beiden Wege sind umso unterscheidbarer, je orthogonaler die beiden Zustandsvektoren $|w_1\rangle$ und $|w_2\rangle$ sind.

Herleitung der Englertschen Ungleichung

$|w_1\rangle$ und $|w_2\rangle$ liefern formale Beschreibung der Unterscheidbarkeit der beiden möglichen Wege des Interferometers:

Die beiden Wege sind umso weniger unterscheidbar, je ähnlicher die Resultate sind, die ein Auslesen der beiden Weganzeiger W_1 und W_2 jeweils liefern würde.

Die beiden Wege sind umso unterscheidbarer, je orthogonaler die beiden Zustandsvektoren $|w_1\rangle$ und $|w_2\rangle$ sind.

$|\langle w_1|w_2\rangle| \in [0, 1]$

$|\langle w_1|w_2\rangle| = 1 \quad \Longrightarrow \quad$ Keine Unterscheidbarkeit der Wege

$|\langle w_1|w_2\rangle| = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Maximale Unterscheidbarkeit der Wege

Herleitung der Englertschen Ungleichung

Definition: Unterscheidbarkeit (Distinguishability) der Wege

$$\mathscr{D}^2 = 1 - |\langle w_1 | w_2 \rangle|^2$$

$\mathscr{D} \in [0, 1]$

$\mathscr{D} = 0 \implies$ Keine Unterscheidbarkeit der Wege

$\mathscr{D} = 1 \implies$ Maximale Unterscheidbarkeit der Wege

Herleitung der Englertschen Ungleichung

Definition: Sichtbarkeit (Visibility) des Interferenzmusters

$$\mathscr{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

$$\begin{aligned} I_{\max} &= \text{maximale Intensität des Interferenzmusters} \\ I_{\min} &= \text{minimale Intensität des Interferenzmusters} \end{aligned}$$

Herleitung der Englertschen Ungleichung

Definition: Sichtbarkeit (Visibility) des Interferenzmusters

$$\mathscr{V} = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}$$

$$\begin{aligned} I_{\text{max}} &= \text{maximale Intensität des Interferenzmusters} \\ I_{\text{min}} &= \text{minimale Intensität des Interferenzmusters} \end{aligned}$$

$\mathscr{V} \in [0, 1]$

$\mathscr{V} = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Keine Sichtbarkeit des Interferenzmusters

$\mathscr{V} = 1 \quad \Longrightarrow \quad$ Maximale Sichtbarkeit des Interferenzmusters

Herleitung der Englertschen Ungleichung

Antreffwahrscheinlichkeitsdichte am Detektor:

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right) + \mathfrak{Re}\left(\overline{\psi_1}\,\psi_2\,\langle w_1|w_2\rangle\right)$$

Herleitung der Englertschen Ungleichung

Antreffwahrscheinlichkeitsdichte am Detektor:

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right) + \mathfrak{Re}\left(\overline{\psi_1}\,\psi_2\,\langle w_1|w_2\rangle\right)$$

Interferenzterm:

$$\begin{aligned}\overline{\psi_1}\,\psi_2\,\langle w_1|w_2\rangle &= |\psi_1|\,|\psi_2|\,|\langle w_1|w_2\rangle|\,e^{i\,\Delta\theta}\\ &= |\psi_1|\,|\psi_2|\,|\langle w_1|w_2\rangle|\,(\cos\Delta\theta + i\,\sin\Delta\theta)\end{aligned}$$

Herleitung der Englertschen Ungleichung

Antreffwahrscheinlichkeitsdichte am Detektor:

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right) + \mathfrak{Re}\left(\overline{\psi_1}\,\psi_2\,\langle w_1|w_2\rangle\right)$$

Interferenzterm:

$$\begin{aligned}\overline{\psi_1}\,\psi_2\,\langle w_1|w_2\rangle &= |\psi_1|\,|\psi_2|\,|\langle w_1|w_2\rangle|\,\mathrm{e}^{i\phi}\\ &= |\psi_1|\,|\psi_2|\,|\langle w_1|d_2\rangle|\,(\cos\phi + i\,\sin\phi)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad |\psi|^2 = \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right) + |\psi_1|\,|\psi_2|\,|\langle w_1|w_2\rangle|\,\cos\phi$$

Herleitung der Englertschen Ungleichung

$\Longrightarrow$ Maximale und minimale Intensität des Interferenzmusters:

$$I_{\max} \propto \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right) + |\psi_1|\,|\psi_2|\,|\langle w_1|w_2\rangle|,$$

$$I_{\min} \propto \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right) - |\psi_1|\,|\psi_2|\,|\langle w_1|w_2\rangle|$$

Herleitung der Englertschen Ungleichung

$\Longrightarrow$ Maximale und minimale Intensität des Interferenzmusters:

$$I_{\max} \propto \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right) + |\psi_1|\,|\psi_2|\,|\langle w_1|w_2\rangle|,$$

$$I_{\min} \propto \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right) - |\psi_1|\,|\psi_2|\,|\langle w_1|w_2\rangle|$$

$\Longrightarrow$ Sichtbarkeit des Interferenzmusters:

$$\mathscr{V} = \frac{2\,|\psi_1|\,|\psi_2|\,|\langle w_1|w_2\rangle|}{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}$$

Herleitung der Englertschen Ungleichung

$\Longrightarrow$ Maximale und minimale Intensität des Interferenzmusters:

$$I_{\max} \propto \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right) + |\psi_1|\,|\psi_2|\,|\langle w_1|w_2\rangle|,$$

$$I_{\min} \propto \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right) - |\psi_1|\,|\psi_2|\,|\langle w_1|w_2\rangle|$$

$\Longrightarrow$ Sichtbarkeit des Interferenzmusters:

$$\mathscr{V} = \frac{2\,|\psi_1|\,|\psi_2|\,|\langle w_1|w_2\rangle|}{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}$$

$$\frac{2\,|\psi_1|\,|\psi_2|}{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2} \leqq 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{V}^2 \leqq |\langle w_1|w_2\rangle|^2$$

Herleitung der Englertschen Ungleichung

$$\mathscr{D}^2 = 1 - |\langle w_1 | w_2 \rangle|^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{V}^2 \leqq 1 - \mathscr{D}^2$$

Herleitung der Englertschen Ungleichung

$$\mathscr{D}^2 = 1 - |\langle w_1 | w_2 \rangle|^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{V}^2 \leqq 1 - \mathscr{D}^2 \quad \Longrightarrow$$

Dualitätsrelation:

$$\mathscr{D}^2 + \mathscr{V}^2 \leqq 1$$

Bedeutung für den Unterricht

Bedeutung für den Unterricht

Dualitätsrelation:

$$\mathscr{D}^2 + \mathscr{V}^2 \leqq 1$$

Bedeutung für den Unterricht

Dualitätsrelation:

$$\mathscr{D}^2 + \mathscr{V}^2 \leqq 1$$

- Je besser die verschiedenen klassisch möglichen Wege eines Quantenobjekts unterscheidbar sind (je größer $\mathscr{D}$), desto geringer ist dessen Interferenzfähigkeit (desto kleiner $\mathscr{V}$).

Bedeutung für den Unterricht

Dualitätsrelation:

$$\mathscr{D}^2 + \mathscr{V}^2 \leqq 1$$

- Je besser die verschiedenen klassisch möglichen Wege eines Quantenobjekts unterscheidbar sind (je größer $\mathscr{D}$), desto geringer ist dessen Interferenzfähigkeit (desto kleiner $\mathscr{V}$).
- Je besser die Interferenzfähigkeit eines Quantenobjekts ist (je größer $\mathscr{V}$), desto geringer ist die Unterscheidbarkeit der Wege.

Bedeutung für den Unterricht

Dualitätsrelation:

$$\mathscr{D}^2 + \mathscr{V}^2 \leqq 1$$

- Je besser die verschiedenen klassisch möglichen Wege eines Quantenobjekts unterscheidbar sind (je größer $\mathscr{D}$), desto geringer ist dessen Interferenzfähigkeit (desto kleiner $\mathscr{V}$).
- Je besser die Interferenzfähigkeit eines Quantenobjekts ist (je größer $\mathscr{V}$), desto geringer ist die Unterscheidbarkeit der Wege.
- Maximale Unterscheidbarkeit der Wege ($\mathscr{D} = 1$) bewirkt verschwindende Interferenzfähigkeit ($\mathscr{V} = 0$).

Bedeutung für den Unterricht

Dualitätsrelation:

$$\mathscr{D}^2 + \mathscr{V}^2 \leqq 1$$

- Je besser die verschiedenen klassisch möglichen Wege eines Quantenobjekts unterscheidbar sind (je größer $\mathscr{D}$), desto geringer ist dessen Interferenzfähigkeit (desto kleiner $\mathscr{V}$).
- Je besser die Interferenzfähigkeit eines Quantenobjekts ist (je größer $\mathscr{V}$), desto geringer ist die Unterscheidbarkeit der Wege.
- Maximale Unterscheidbarkeit der Wege ($\mathscr{D} = 1$) bewirkt verschwindende Interferenzfähigkeit ($\mathscr{V} = 0$).
- Maximale Interferenzfähigkeit ($\mathscr{V} = 1$) bewirkt fehlende Unterscheidbarkeit der Wege ($\mathscr{D} = 0$).

Bedeutung für den Unterricht

Dualitätsrelation:

$$\mathscr{D}^2 + \mathscr{V}^2 \leq 1$$

- Herleitung für Unterricht der Oberstufe generell zu aufwendig, aber angesichts des Trends zu mehr auch formaler Quantenmechanik am Gymnasium für starke Kurse dennoch interessant

Bedeutung für den Unterricht

Dualitätsrelation:

$$\mathscr{D}^2 + \mathscr{V}^2 \leqq 1$$

- Herleitung für den Unterricht der Oberstufe generell zu aufwendig, aber angesichts des Trends zu mehr auch formaler Quantenmechanik am Gymnasium für starke Kurse dennoch interessant
- Als „Eselsbrücke“ zur besseren Einprägung der Je - Desto - Variante für Schüler sehr hilfreich (wird gern angenommen)

Bedeutung für den Unterricht

Dualitätsrelation:

$$\mathscr{D}^2 + \mathscr{V}^2 \leqq 1$$

- Herleitung für den Unterricht der Oberstufe generell zu aufwendig, aber angesichts des Trends zu mehr auch formaler Quantenmechanik am Gymnasium für starke Kurse dennoch interessant
- Als „Eselsbrücke“ zur besseren Einprägung der Je - Desto - Variante für Schüler sehr hilfreich (wird gern angenommen)
- Verdient als wesentliche Grundlage der Quantenmechanik im Unterricht unbedingt Erwähnung