

Die Englertsche Dualitätsrelation

Markus Vogt

29. Mai 2023

Zusammenfassung

Besonders faszinierend am Welle-Teilchen-Dualismus ist, daß sich dieses oben rein qualitativ formulierte Prinzip quantifizieren läßt, wie B.-G. Englert 1996 zeigen konnte [1] - [3]. Im Zentrum dieser quantitativen Beschreibung steht eine Ungleichung, die genau das zum Ausdruck bringt, was über die traditionelle Entweder-Oder-Aussage hinausgeht; ihre Bedeutung wird jedoch erst dadurch so richtig klar, daß man sie in formaler Strenge herleiten kann. Da das etwas längere Rechnungen erforderlich macht, verteilen wir diese auf mehrere Abschnitte.

1 Sichtbarkeit von Interferenzmustern

Zunächst definieren wir eine Größe zur quantitativen Erfassung der Fähigkeit eines Quantenobjekts, Interferenzmuster auszubilden. Wir starten dazu mit der Betrachtung eines beliebigen symmetrischen Zwei-Wege-Interferometers, das von Quantenobjekten durchlaufen wird; diese sind beschreibbar durch einen Zustandsvektor der Form

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle).$$

Der Dichteoperator des Quantenobjekts lautet damit

$$\rho_{Q,0} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} (|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_2\rangle\langle\psi_1| + |\psi_1\rangle\langle\psi_2|);$$

wie üblich signalisieren die Außerdiagonalelemente das Vorhandensein von Interferenzphänomenen. Zusätzlich soll der Versuchsaufbau ein Gerät zur Markierung der Wege enthalten, also einen Welcher-Weg-Detektor. Der Dichteoperator des Zustands, in den dieser Wegmarkierer anfänglich präpariert ist, sei $\rho_{M,0}$. Damit erreichen wir weitgehende Allgemeinheit, da sich dadurch das Wegmarkierengerät auch in gemischten Zuständen befinden darf. Die Ermöglichung von Welcher-Weg-Information besteht in einer Wechselwirkung des Wegmarkierers mit dem Quantenobjekt; diese ist beschreibbar durch unitäre Operatoren \hat{U}_1 und \hat{U}_2 , einen für jeden der beiden Wege. Für Weg 1 bedeutet das den Übergang

$$\rho_{M,0} \longrightarrow \hat{U}_1^+ \rho_{M,0} \hat{U}_1 \equiv \rho_{M,1}$$

und für Weg 2

$$\rho_{M,0} \longrightarrow \hat{U}_2^+ \rho_{M,0} \hat{U}_2 \equiv \rho_{M,2}.$$

Die Wechselwirkung des Quantenobjekts mit dem Wegmarkierer verursacht eine Verschränkung dieser beiden Systeme; der Dichteoperator des verschränkten Systems aus Quantenobjekt und Wegmarkierer ist

$$\widehat{P} = \frac{1}{2} (|\psi_1\rangle \langle \psi_1| \rho_{M,1} + |\psi_2\rangle \langle \psi_2| \rho_{M,2} + |\psi_2\rangle \langle \psi_1| \widetilde{\rho}_M + |\psi_1\rangle \langle \psi_2| \widetilde{\rho}_M^\dagger) \quad (1)$$

mit $\widetilde{\rho}_M \equiv \widehat{U}_2^\dagger \rho_{M,0} \widehat{U}_1$. Durch die Bildung der entsprechenden Teilspuren bei (1) findet man den Dichteoperator des Wegmarkierers

$$\rho_M = \text{tr}_Q \widehat{P} = \frac{1}{2} (\rho_{M,1} + \rho_{M,2})$$

und den Dichteoperator des Quantenobjekts

$$\rho_Q = \text{tr}_M \widehat{P} = \frac{1}{2} (|\psi_1\rangle \langle \psi_1| + |\psi_2\rangle \langle \psi_2| + C |\psi_2\rangle \langle \psi_1| + C^* |\psi_1\rangle \langle \psi_2|),$$

mit der Abkürzung $C = \text{tr}_M \widetilde{\rho}_M = \text{tr}_M (\widehat{U}_2^\dagger \rho_{M,0} \widehat{U}_1)$; diese komplexe Zahl steht zusammen mit ihrer komplex konjugierten Zahl als Vorfaktor vor den Außerdiagonalelementen des Dichteoperators und kann folglich als *Kontrast-Faktor* für die Sichtbarkeit des Interferenzmusters interpretiert werden. Entsprechend seiner Definition ist dieser Kontrast-Faktor eine charakteristische Größe des Wegmarkierers.

Ein Interferenzmuster wird üblicherweise durch die Phasendifferenzen bestimmt, die bei Superpositionen zwischen den beteiligten Kanälen auftreten; ist die Phasendifferenz etwa ϕ , dann lautet die entsprechende Superposition

$$|\psi(\phi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + e^{i\phi} |\psi_2\rangle).$$

Der zugehörige Dichteoperator ist

$$|\psi(\phi)\rangle \langle \psi(\phi)| = \frac{1}{2} (|\psi_1\rangle \langle \psi_1| + |\psi_2\rangle \langle \psi_2| + e^{i\phi} |\psi_2\rangle \langle \psi_1| + e^{-i\phi} |\psi_1\rangle \langle \psi_2|).$$

Zur Beschreibung des Interferenzmusters berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $p(\phi)$, den Zustand $|\psi(\phi)\rangle$ vorzufinden und erhalten

$$\begin{aligned} p(\phi) &= \text{tr}_Q (|\psi(\phi)\rangle \langle \psi(\phi)| \rho_Q) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}_Q (|\psi_1\rangle \langle \psi_1| + C^* |\psi_1\rangle \langle \psi_2| + |\psi_2\rangle \langle \psi_2| + C |\psi_2\rangle \langle \psi_1| \\ &\quad + e^{i\phi} |\psi_2\rangle \langle \psi_1| + e^{i\phi} C^* |\psi_2\rangle \langle \psi_2| + e^{-i\phi} |\psi_1\rangle \langle \psi_2| + e^{-i\phi} C |\psi_1\rangle \langle \psi_1|) \\ &= \frac{1}{4} (2 + e^{-i\phi} C + e^{i\phi} C^*) \\ &= \frac{1}{2} [1 + \Re(e^{i\phi} C^*)], \end{aligned} \quad (2)$$

also einen Ausdruck, der Werte im Bereich von

$$p_{\min} = \frac{1}{2} (1 - |C|)$$

bis

$$p_{\max} = \frac{1}{2}(1 + |C|)$$

annehmen kann. Definiert man nun die *Sichtbarkeit der Interferenzmuster*¹ \mathcal{V} gemäß

$$\mathcal{V} = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{p_{\max} + p_{\min}},$$

so folgt durch Einsetzen unmittelbar

$$\mathcal{V} = |C|,$$

ein Ergebnis, das angesichts obiger Interpretation der Größe C einen sehr anschaulichen Charakter besitzt. \mathcal{V} ist ein Maß für die Fähigkeit der betrachteten Quantenobjekte, bei der verwendeten experimentellen Anordnung Interferenzerscheinungen zu verursachen.

2 Unterscheidbarkeit der Wege

Als nächstes definieren wir eine Größe, mit der die Unterscheidbarkeit der möglichen Wege eines Quantenobjekts quantitativ beschrieben werden kann. Zur Unterscheidbarkeit der beiden möglichen Wege, die das Quantenobjekt in einem Zwei-Wege-Interferometer nehmen kann, muß irgendeine Messung vorgenommen werden, deren Meßresultat Schlußfolgerungen über den eingeschlagenen Weg zuläßt. Dazu betrachten wir einen Operator \widehat{W} , der eine Observable zum Auslesen der Welcher-Weg-Information repräsentiert, mit Eigenwerten W und Eigenzuständen $|W\rangle$. Die möglichen Meßergebnisse W einer solchen Messung sollen Aufschluß über den Weg des Quantenobjekts liefern. Die Wahrscheinlichkeit $P(W)$ des Auftretens von W bei Messung dieser Observablen ist

$$P(W) = \langle W | \rho_M | W \rangle = \frac{1}{2} \langle W | \rho_{M,1} | W \rangle + \frac{1}{2} \langle W | \rho_{M,2} | W \rangle \quad (3)$$

Einholen von Welcher-Weg-Information besteht nun darin, aus der Verteilung der Meßresultate bei Messungen der durch \widehat{W} repräsentierten Observablen den Weg herauszufinden, den das Quantenobjekt wohl genommen hat. Das kann typisch quantenmechanisch im allgemeinen nicht mit Sicherheit herausgefunden werden, außer in dem trivialen Fall, daß auf einem der beiden Wege überhaupt nichts ankommt. Man wird aber wohl dazu neigen, jenen Weg als den richtigen anzunehmen, zu dem derjenige der beiden Summanden in (3) gehört, der am meisten zu $P(W)$ beiträgt. Damit ist die Wahrscheinlichkeit \mathcal{L}_W , den Weg richtig zu erraten, gegeben durch

$$\mathcal{L}_W = \sum_W \text{Max} \left\{ \frac{1}{2} \langle W | \rho_{M,1} | W \rangle, \frac{1}{2} \langle W | \rho_{M,2} | W \rangle \right\}$$

Dabei gilt ersichtlicherweise $1/2 \leq \mathcal{L}_W \leq 1$, was auch der Intuition entspricht, denn im ungünstigsten Fall rät man ins Blaue hinein mit einer Erfolgsaussicht von 50 %, im

¹Englisch *Fringe Visibility*.

günstigsten Fall weiß man Bescheid und rät mit Erfolgchancen von 100 %. Daher definiert man sinnvollerweise die *Kenntnis* \mathcal{K}_W der Wege gemäß

$$\mathcal{K}_W = 2\mathcal{L}_W - 1;$$

für diese gilt dann

$$0 \leq \mathcal{K}_W \leq 1.$$

Unter Verwendung der Relation

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}|x - y|$$

erhält man dafür

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_W &= \frac{1}{2} \sum_W \langle W | \rho_{M,1} + \rho_{M,2} | W \rangle + \frac{1}{2} \sum_W |\langle W | \rho_{M,1} - \rho_{M,2} | W \rangle| - 1 \\ &= \sum_W \langle W | \rho_M | W \rangle + \frac{1}{2} \sum_W |\langle W | \rho_{M,1} - \rho_{M,2} | W \rangle| - 1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_W |\langle W | \rho_{M,1} - \rho_{M,2} | W \rangle|. \end{aligned} \quad (4)$$

Je größer die Kenntnis der Wege ist, desto besser wird es gelingen, sie erfolgreich zu unterscheiden. Das führt unmittelbar zur Definition der *Unterscheidbarkeit der Wege*² \mathcal{D} in der Form

$$\mathcal{D} \equiv \max_W \mathcal{K}_W.$$

Diese gibt nicht die aktuell erreichte, sondern die prinzipiell *maximal mögliche* Unterscheidung der Wege an, womit der Tatsache Rechnung getragen wird, daß die Möglichkeit des Einholens von Welcher-Weg-Information bereits ausreicht, um die Interferenzfähigkeit des betrachteten Systems zu untergraben. Genauer gesagt ist \mathcal{K}_W die maximal mögliche Information, die man durch Messung der Observablen W über die beiden Wege erreichen kann; dagegen ist \mathcal{D} die von der Natur vorgegebene maximale Information über die Wege, die im System steckt. Daher gilt für diese beiden Größen

$$\mathcal{K}_W \leq \mathcal{D}$$

und folglich auch

$$\mathcal{L}_W \leq \frac{1}{2}(1 + \mathcal{D}).$$

Wie nahe diese Ungleichungen Gleichungen kommen, das heißt wie weitreichend die Kenntnis der Wege wird, hängt natürlich von einer möglichst geschickten Wahl der Observablen W ab. Diese ist optimal, wenn die Eigenzustände $|W\rangle$ von \widehat{W} auch Eigenzustände von $|\rho_{M,1} - \rho_{M,2}|$ sind; dann hat man sogar

$$\mathcal{K}_W = \mathcal{D}$$

²Englisch *Distinguishability*

und

$$\mathcal{L}_W = \frac{1}{2}(1 + \mathcal{D})$$

und kann (4) direkt auswerten, da die Summe dort zu einer Summe über die Eigenwerte wird und damit zur Spur des Operators $|\rho_{M,1} - \rho_{M,2}|$. Für die Unterscheidbarkeit der Wege gilt daher

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \text{tr}_M (|\rho_{M,1} - \rho_{M,2}|). \quad (5)$$

Ist der Wegmarkierer in einem reinen Zustand, gilt also für dessen Dichteoperator anfangs etwa

$$\rho_{M,0} = |M_0\rangle \langle M_0|,$$

dann folgt daraus

$$\begin{aligned} \rho_{M,1} &= |M_1\rangle \langle M_1| & \text{mit} & \quad |M_1\rangle = \hat{U}_1^+ |M_0\rangle, \\ \rho_{M,2} &= |M_2\rangle \langle M_2| & \text{mit} & \quad |M_2\rangle = \hat{U}_2^+ |M_0\rangle, \\ \tilde{\rho}_M &= |M_2\rangle \langle M_1|, \end{aligned}$$

und damit weiter

$$\rho_{M,1} - \rho_{M,2} = |M_1\rangle \langle M_1| - |M_2\rangle \langle M_2|.$$

Dieser Operator hat die nichtverschwindenden Eigenwerte $\pm \sqrt{1 - |\langle M_1|M_2\rangle|^2}$, und da die Spur eines Operators gleich der Summe seiner Eigenwerte ist, liefert (5)

$$\text{tr}_M (|\rho_{M,1} - \rho_{M,2}|) = \sqrt{1 - |\langle M_1|M_2\rangle|^2}. \quad (6)$$

Davon werden wir gleich Gebrauch machen.

3 Beweis der Dualitätsrelation

Um nun für \mathcal{V} und \mathcal{D} eine Relation herzuleiten, betrachten wir wieder allgemeine Zustände des Wegmarkierergerätes und die Spektraldarstellung von dessen Dichteoperator $\rho_{M,0}$,

$$\rho_{M,0} = \sum_k m_k |M_{k,0}\rangle \langle M_{k,0}|$$

mit Koeffizienten $m_k \geq 0$, die zusätzlich der Relation $\sum_k m_k = 1$ genügen, sowie Eigenvektoren $|M_{k,0}\rangle$, die orthonormiert sind, es gelte also $\langle M_{j,0}|M_{k,0}\rangle = \delta_{jk}$. Daraus folgt für $\rho_{M,1}$, $\rho_{M,2}$ und $\tilde{\rho}_M$

$$\rho_{M,1} = \sum_k m_k |M_{k,1}\rangle \langle M_{k,1}| \quad \text{mit} \quad |M_{k,1}\rangle = \hat{U}_1^+ |M_{k,0}\rangle, \quad (7)$$

$$\rho_{M,2} = \sum_k m_k |M_{k,2}\rangle \langle M_{k,2}| \quad \text{mit} \quad |M_{k,2}\rangle = \hat{U}_2^+ |M_{k,0}\rangle, \quad (8)$$

$$\tilde{\rho}_M = \sum_k m_k |M_{k,2}\rangle \langle M_{k,1}|. \quad (9)$$

(7) und (8) liefern nun

$$\rho_{M,1} - \rho_{M,2} = \sum_k m_k (|M_{k,1}\rangle \langle M_{k,1}| - |M_{k,2}\rangle \langle M_{k,2}|),$$

und damit wird (5) zu

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_M \sum_k m_k (|M_{k,1}\rangle \langle M_{k,1}| - |M_{k,2}\rangle \langle M_{k,2}|).$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\operatorname{tr}(|A - B|) \leq \operatorname{tr}(|A|) + \operatorname{tr}(|B|)$$

erhält man daraus

$$\mathcal{D} \leq \frac{1}{2} \sum_k m_k \operatorname{tr}_M (|M_{k,1}\rangle \langle M_{k,1}| + |M_{k,2}\rangle \langle M_{k,2}|)$$

und wegen (6) weiter

$$\mathcal{D} \leq \sum_k m_k \sqrt{1 - |\langle M_{k,1}|M_{k,2}\rangle|^2}. \quad (10)$$

Außerdem liefert (9) für die Sichtbarkeit der Interferenzmuster

$$\mathcal{V} = |\operatorname{tr}_M \tilde{\rho}_M| = \left| \sum_k m_k \langle M_{k,1}|M_{k,2}\rangle \right|. \quad (11)$$

Die $|M_{k,1}\rangle$ und $|M_{k,2}\rangle$ sind nicht notwendigerweise zueinander orthogonal, da sie aus $|M_0\rangle$ zwar durch unitäre Transformationen entstehen, aber jeweils nicht beide aus derselben; dennoch liegen die Beträge von Skalarprodukten der Form $\langle M_{k,1}|M_{k,2}\rangle$ natürlich im Intervall $[-1, 1]$. Man kann solche Skalarprodukte deshalb in der Form

$$\langle M_{k,1}|M_{k,2}\rangle = \sin \theta_k e^{i \phi_k}$$

als Funktion zweier Winkel θ_k und ϕ_k schreiben, mit $0 \leq \theta_k \leq \pi/2$ und $0 \leq \phi_k \leq 2\pi$. Einsetzen in (10) und (11) führt auf

$$\mathcal{D} \leq \sum_k m_k \cos \theta_k$$

sowie

$$\mathcal{V} = \left| \sum_k m_k \sin \theta_k e^{i \phi_k} \right|,$$

und mit etwas Trigonometrie erhält man damit

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq \sum_j \sum_k m_j m_k [\cos \theta_j \cos \theta_k + \sin \theta_j \sin \theta_k \cos(\phi_j - \phi_k)] \quad (12)$$

Für den Ausdruck in den eckigen Klammern gilt

$$\cos \theta_j \cos \theta_k + \sin \theta_j \sin \theta_k \cos(\phi_j - \phi_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sin \theta_j \cos \phi_j \sin \theta_k \cos \phi_k + \sin \theta_j \sin \phi_j \sin \theta_k \sin \phi_k + \cos \theta_j \cos \theta_k \\
&= \begin{pmatrix} \sin \theta_j \cos \phi_j \\ \sin \theta_j \sin \phi_j \\ \cos \phi_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta_k \cos \phi_k \\ \sin \theta_k \sin \phi_k \\ \cos \phi_k \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

dieser Ausdruck hat genau die Gestalt eines Skalarprodukts aus zwei Einheitsvektoren in räumlichen Polarkoordinaten, und das bedeutet

$$\cos \theta_j \cos \theta_k + \sin \theta_j \sin \theta_k \cos (\phi_j - \phi_k) \leq 1.$$

Eingesetzt in (12) liefert das

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq \left(\sum_k m_k \right)^2 = (\text{tr}_M \rho_{M,0})^2 = 1$$

und damit das Ergebnis

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq 1. \quad (13)$$

Das ist eine für beliebige zweikanalige Interferenzerscheinungen gültige fundamentale *Dualitäts-Relation* und damit die *quantitative Fassung des Welle-Teilchen-Dualismus*. Sie gibt die beschriebenen Situationen genau wieder:

- Je besser die verschiedenen möglichen Wege eines Quantenobjekts unterscheidbar sind (je größer \mathcal{D}), desto geringer ist dessen Interferenzfähigkeit (desto kleiner \mathcal{V}).
- Je besser die Interferenzfähigkeit eines Quantenobjekts ist (je größer \mathcal{V}), desto geringer ist die Unterscheidbarkeit der Wege, die es genommen haben könnte.
- Maximale Unterscheidbarkeit der Wege ($\mathcal{D} = 1$) bewirkt verschwindende Interferenzfähigkeit ($\mathcal{V} = 0$).
- Maximale Interferenzfähigkeit ($\mathcal{V} = 1$) bewirkt fehlende Unterscheidbarkeit der Wege ($\mathcal{D} = 0$).

Wesentliche Bedeutung kommt dabei dem Kleiner-Gleich-Zeichen anstelle eines Gleichheitszeichens in (13) zu, denn darin zeigt sich die im allgemeinen nicht gegebene Umkehrbarkeit des Welle-Teilchen-Dualismus. Falls nämlich \mathcal{D} klein ist, folgt daraus keineswegs, daß \mathcal{V} automatisch groß ist, und ein kleiner Wert für \mathcal{V} zieht ebenso wenig zwangsläufig einen großen Wert für \mathcal{D} nach sich. Das gilt nur, wenn sich die Markierungssysteme zu Anfang in reinen Zuständen befinden. Aus (5) und (6) folgt für diesen Fall

$$\mathcal{D} = \sqrt{1 - |\langle M_1 | M_2 \rangle|^2}. \quad (14)$$

und aus (6)

$$\mathcal{V} = |\text{tr}_M \tilde{\rho}_M| = |\langle M_1 | M_2 \rangle|.$$

Dies liefert unmittelbar

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 = 1, \quad (15)$$

das heißt, aus der Ungleichung wird im Falle eines Wegmarkierers mit reinem Anfangszustand eine Gleichung. Da eine realistische Interpretation der Quantenmechanik davon ausgehen muß, daß sich jedes physikalische System eigentlich in einem reinen Zustand befindet und wir diesen im Normalfall einfach nicht kennen, ist diese, durch Gleichung (15) repräsentierte Fassung des quantitativen Welle-Teilchen-Dualismus die fundamentalste Version desselben.

Literatur

- [1] B.-G. Englert, Acta physica slovacica **46**, 249, 1996
- [2] B.-G. Englert, Physical Review Letters **77**, 2154, 1996
- [3] B.-G. Englert, Zeitschrift für Naturforschung **54a**, 11, 1999