Minimale Begriffe und Interpretation der Quantentheorie

Bausteine eines Unterrichtskonzepts

Helmut Fink und Tobias Jung

24. Juni 2023

Ziel des Konzepts

1. Tieferes Verständnis der (Struktur der) Quantentheorie
   $\rightarrow$ „Hinter die Phänomene blicken"
   $\rightarrow$ Unterschiede zur klassischen Physik (besser) verstehen
2. Erschließen der Interpretationsdebatte bzw. Begründung von Deutungsaussagen
   $\rightarrow$ Naturbild der modernen Physik
   $\rightarrow$ Brücke zur Philosophie der Physik ermöglichen

... soweit das mit Schulmitteln möglich ist!

C. F. von Weizsäcker: Theoretische Physik als „harter Kern der Neuzeit"

Grundideen des Konzepts (1)

Elementare Einführung *theoretischer* Begriffe, die für ein Verständnis der „Besonderheit“ der QT erforderlich sind

- QT als „neuartige Theorie“ behandeln
- Formalismus betonen *und* vereinfachen
- Anschauung für die mathematische Struktur entwickeln
- Blick in den „Maschinenraum der Theorie“

Grundideen des Konzepts (2)

Schrittweiser begrifflicher Aufbau, um schließlich die EPR-Situation und die Frage nach der physikalischen Realität beurteilen zu können

- gedankliche „Zutaten“ in systematischer Reihenfolge
- erst Superposition (1-Teilchen-System),
  dann Verschränktheit (2-Teilchen-System)
- erst Messprozess,
  dann Frage nach „Nichtlokalität“ der QT

Grundideen des Konzepts (3)

„Natur verstehen“ als Triumph des menschlichen Geistes
statt Quantenwelt als „Welt der Wunder“

- Begriffliche Grundlagen vor praktischen Anwendungen
- Konkrete Beispiele zur Illustration: Spin $\frac{1}{2}$, lineare Polarisation, Lichtwege im Interferometer
- Motivation für QT schon vorausgesetzt!

Grundideen des Konzepts

1. Elementare Einführung *theoretischer* Begriffe, die für ein Verständnis der „Besonderheit“ der QT erforderlich sind
2. Schrittweiser begrifflicher Aufbau → EPR-Situation und die Frage nach der physikalischen Realität
3. „Natur verstehen“ als Triumph des menschlichen Geistes statt Quantenwelt als „Welt der Wunder“

→ *Elementarisierung statt Mystifizierung!*

Plan und Stand der Arbeiten

Fünf Unterrichtseinheiten:

1. Grundlagen der Quantentheorie – mit Aufgaben (*liegt vor*)
2. Verschränkte Zustände: Die EPR-Situation (*ist in Arbeit*)
3. Auf der Suche nach der physikalischen Realität:
   Die EPR-Argumentation
4. Bellsche Ungleichungen und ihre experimentelle Verletzung
5. Positionen in der Deutungsdebatte der Quantentheorie

Didaktische Vereinfachungen

- Nichtrelativistische Quantenmechanik
- Diskrete Freiheitsgrade
- Niederdimensionaler Zustandsraum
- Reelle Koeffizienten

$$\left.\begin{array}{l}\text{Niederdimensionaler Zustandsraum}\\ \text{Reelle Koeffizienten}\end{array}\right\} \rightarrow \mathcal{H} = \mathbb{R}^2$$

$\rightarrow$ Vorteil: Anschauung in (Zeichen-)Ebene

- Maxime:
  Das Einfachste wählen, ohne das Wesentliche zu verlieren

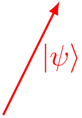
Einstein: „... so einfach wie möglich, aber nicht einfacher!“

Grundbegriffe der (Quanten-)Theorie

	Zustand	**Observable**	**Voraussage**
KM	Phasenraumdichte $w\,(p, q) \geq 0$	reelle Phasenraumfunktion $a\,(p, q)$	Werteverteilung von a
speziell	$\delta\,(p - p_0, q - q_0)$ Phasenraumpkt. (p_0, q_0)		Wert von a
QT allg.	Zustandsoperator $W = W^+ \geq 0$	selbstadjungierter Operator A	Werteverteilung von A
speziell	1-dim. Projektor $\lvert\psi\rangle\langle\psi\rvert$ Zustandsvektor $e^{i\varphi}\lvert\psi\rangle$		Wahrscheinlichkeiten für mögl. Werte von A
Vereinfachung	Vektor der Länge 1 in der Ebene	„Geradenpaar“ und 2 Werte (Spektralsatz!)	2 Wahrscheinlichkeiten

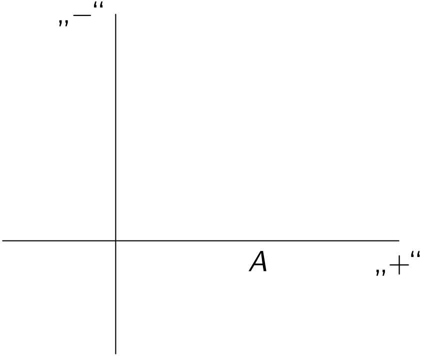
Postulat 1: Zustandsbegriff

Ein Vektor $|\psi\rangle$ der Länge 1 aus dem sog. Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ beschreibt den *(reinen) Zustand* eines Quantensystems bzw. Quantenobjekts. Dieser Vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ heißt *Zustandsvektor*.



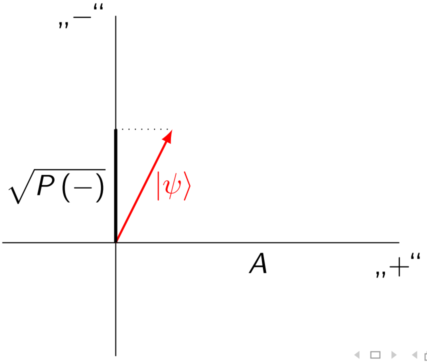
Postulat 2: Observablenbegriff

Die Wahl einer *Observablen* A an diesem Quantensystem bzw. Quantenobjekt entspricht der Wahl eines Satzes paarweise senkrechter Geraden im Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, deren jede einem möglichen Messwert zugeordnet wird.



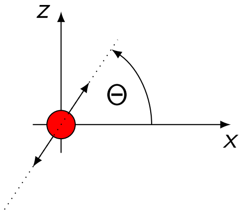
Postulat 3: Bornsche Regel als Verbindung von Zustands- und Observablenbegriff

Die Wahrscheinlichkeit $P(a)$, bei der Messung einer Observablen A einen bestimmten Messwert a zu erhalten, ist gegeben durch das Quadrat der Länge der Projektion des Zustandsvektors $|\psi\rangle$ auf die diesem Messwert zugeordnete Gerade.



Beispiel: Spin-$\frac{1}{2}$-System

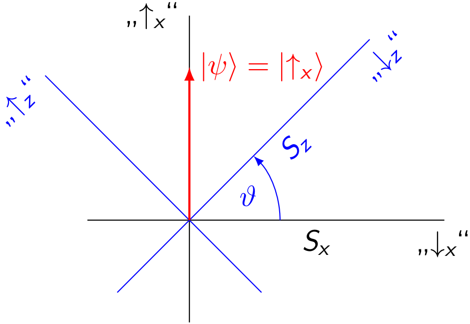
- Messung des Spins in einer beliebig gewählten Raumrichtung (im Ortsraum, parametrisiert durch Winkel Θ)



- Messung der zugehörigen Observablen S_Θ liefert eines von zwei möglichen Messergebnissen „$\uparrow_\Theta$“ bzw. „$\downarrow_\Theta$“ mit den Messwerten $+\frac{\hbar}{2}$ bzw. $-\frac{\hbar}{2}$
- Dem Winkel Θ im Ortsraum entspricht der Winkel $\vartheta = \frac{\Theta}{2}$ im Hilbert-Raum

Aufgabenbeispiel: Situation

Für ein Spin-$\frac{1}{2}$-Quantensystem im Zustand $|\psi\rangle = |\uparrow_x\rangle$ werden die Observablen S_x und S_z betrachtet. Die beiden Observablen werden durch gegeneinander um den Winkel $\vartheta = 45^\circ$ verdrehte Geradenpaare veranschaulicht.



Aufgabenbeispiel: Teilaufgabe a)

Aufgabe: Begründen Sie bezugnehmend auf die Abbildung, dass die Observablen S_x und S_z inkompatibel sind.

Aufgabenbeispiel: Teilaufgabe a)

Aufgabe: Begründen Sie bezugnehmend auf die Abbildung, dass die Observablen S_x und S_z inkompatibel sind.

Definition (im Unterricht behandelt): Zwei Observablen A_1 und A_2, deren Messwerte nicht zugleich mit Sicherheit vorhergesagt werden können, heißen *inkompatibel*.

Aufgabenbeispiel: Teilaufgabe a)

Aufgabe: Begründen Sie bezugnehmend auf die Abbildung, dass die Observablen S_x und S_z inkompatibel sind.

Definition (im Unterricht behandelt): Zwei Observablen A_1 und A_2, deren Messwerte nicht zugleich mit Sicherheit vorhergesagt werden können, heißen *inkompatibel*.

Lösungsvorschlag: Der Zustandsvektor $|\psi\rangle = |\uparrow_x\rangle$ liegt auf der „$\uparrow_x$"-Geraden. Da er nicht zugleich auf einer der beiden Geraden, die zur Observablen S_z gehören, liegen kann, sind die Observablen S_x und S_z inkompatibel.

Aufgabenbeispiel: Teilaufgabe b)

Aufgabe: Erläutern Sie, was $P\left(\downarrow_z\right)$ bedeutet.

Aufgabenbeispiel: Teilaufgabe b)

Aufgabe: Erläutern Sie, was $P\left(\downarrow_z\right)$ bedeutet.

Lösungsvorschlag: $P\left(\downarrow_z\right)$ ist die Wahrscheinlichkeit, bei Messung der Observablen S_z am Quantensystem, also der räumlichen Spinkomponente in z-Richtung, „Spin down" zu finden; der entsprechende Messwert ist $-\frac{\hbar}{2}$.

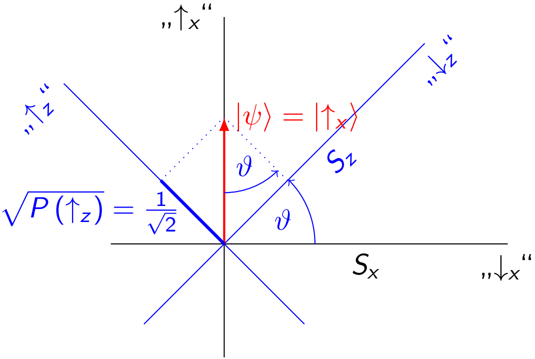
Aufgabenbeispiel: Teilaufgabe c)

Aufgabe: Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(\uparrow_x)$, $P(\downarrow_x)$, $P(\uparrow_z)$ und $P(\downarrow_z)$. Interpretieren Sie Ihr Resultat.

Aufgabenbeispiel: Teilaufgabe c)

Aufgabe: Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(\uparrow_x)$, $P(\downarrow_x)$, $P(\uparrow_z)$ und $P(\downarrow_z)$. Interpretieren Sie Ihr Resultat.

Lösungsvorschlag:



Aufgabenbeispiel: Teilaufgabe c)

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt (vgl. Abbildung):

$$
\begin{aligned}
P(\uparrow_x) &= 1 \\
P(\downarrow_x) &= 0 \\
P(\uparrow_z) &= (\cos 45^\circ)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \\
P(\downarrow_z) &= (\sin 45^\circ)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Aufgabenbeispiel: Teilaufgabe c)

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt (vgl. Abbildung):

$$\begin{aligned} P(\uparrow_x) &= 1 \\ P(\downarrow_x) &= 0 \\ P(\uparrow_z) &= (\cos 45^\circ)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ P(\downarrow_z) &= (\sin 45^\circ)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der Messwert der Observablen S_x kann hier mit Sicherheit vorausgesagt werden ($P(\uparrow_x) = 1$). Die Wahrscheinlichkeiten für die zwei möglichen Messwerte der Observablen S_z sind gleichverteilt ($P(\uparrow_z) = P(\downarrow_z) = \frac{1}{2}$). Damit sind die Observablen S_x und S_z komplementär.

Aufgabenbeispiel: Teilaufgabe d)

Aufgabe: Berechnen Sie $P(\uparrow_z) + P(\downarrow_z)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabenbeispiel: Teilaufgabe d)

Aufgabe: Berechnen Sie $P(\uparrow_z) + P(\downarrow_z)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösungsvorschlag: Für die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$P(\uparrow_z) + P(\downarrow_z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

Aufgabenbeispiel: Teilaufgabe d)

Aufgabe: Berechnen Sie $P(\uparrow_z) + P(\downarrow_z)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösungsvorschlag: Für die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$P(\uparrow_z) + P(\downarrow_z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

Es gibt für eine Messung der Observablen S_z nur zwei mögliche Messergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung der Observablen *entweder* den einen *oder* den anderen Messwert erbringt, ist 1, denn irgendeinen möglichen Messwert muss die Messung ja liefern (Normierung der Wahrscheinlichkeit, vgl. Axiome von Kolmogorow).

Weitere eingeführte Konzepte

- Vertiefungen zu Observablen, Zuständen sowie Fakten, Wahrscheinlichkeiten und Messensembles
- Komplementarität
- Schrödinger-Bild und Heisenberg-Bild
  (Bemerkung zur Bedeutung der Schrödinger-Gleichung)
- Auch gemischte Zustände
- Entstehen eines Faktums durch Messung
- Ensemblebild

Vorzüge des Konzepts

- betont begriffliche Klarheit im Theorieaufbau
- orientiert sich am mathematischen Formalismus, bleibt aber im mathematischen Aufwand minimal
- eröffnet „intellektuell aufwärtskompatibelen“ Lernpfad (keine „Babysprache“!)
- bietet natürlichen Zugang zu Interpretationsbegriff und Deutungsdebatte
- erschließt Zugang zu Theorieabhängigkeit des Naturbildes
- beleuchtet das Verhältnis von Physik und (Natur-)Philosophie
- ermöglicht konzeptionelle Erweiterungen und Ausblicke
- ist anschlussfähig an Quanteninformation, Quantencomputing etc. durch logischen Atomismus („Qubit“)

Problemstellen des Konzepts und Ausblick

- weist Distanz zu Dualismus-Tradition und Doppelspalt auf
- erschwert Zugang zu „Wellenfunktion", Orts- und Impulsdarstellung ($\rightarrow$ Atombau?)
- legt strenge Auswahl von Demonstrationsexperimenten nahe (2-wertige Observable!)
- Motivationslücke durch anwendungsfernen Begriffsaufbau, jedoch ggf. kombinierbar mit Potentialtopf oder Quantenbits oder Schlüsselexperimenten
- Desiderat: systematischer konzeptioneller Vergleich mit milq, Wesenszügen, Interferometer/Quantenoptik
- Desiderat: Abgleich mit Lehrplänen, Schulbüchern, Bezug zu „Nature of Science" ($\rightarrow$ *Diskussion!*)