

Die Ununterscheidbarkeit von Quantenobjekten als Interpretationsproblem

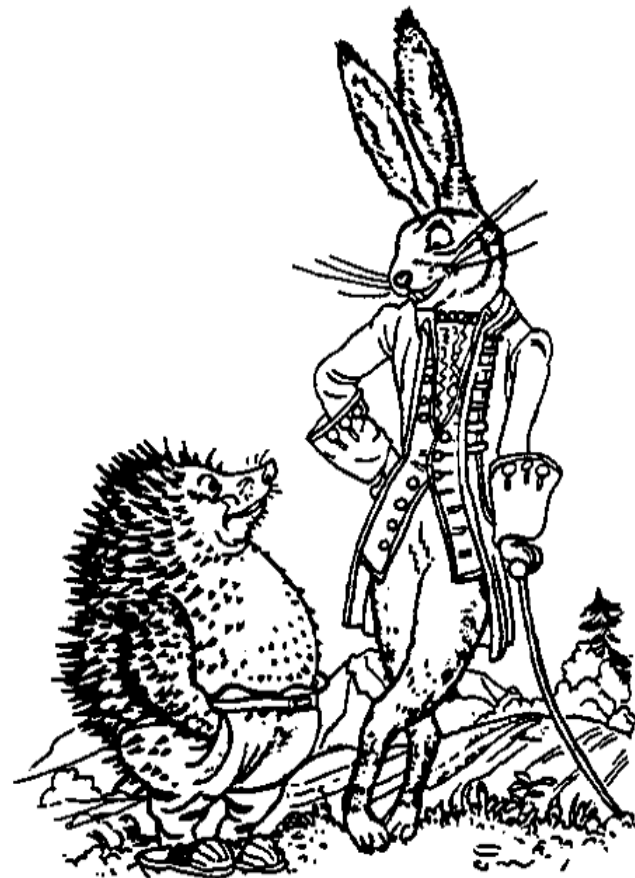
**Workshop der Heisenberg-Gesellschaft
„Quantenphysik an der Schule“
Schloss Lautrach, 30. 6. - 2. 7. 2017**

Identität des Ununterscheidbaren

„Bekanntlich süht dem Swinegel sien Fro jus so uut wie ehr Mann.“

oder

*Ununterscheidbarkeit
identischer Teilchen*



Identität des Ununterscheidbaren

„Bekanntlich süht dem Swinegel sien Fro jus so uut wie ehr Mann.“

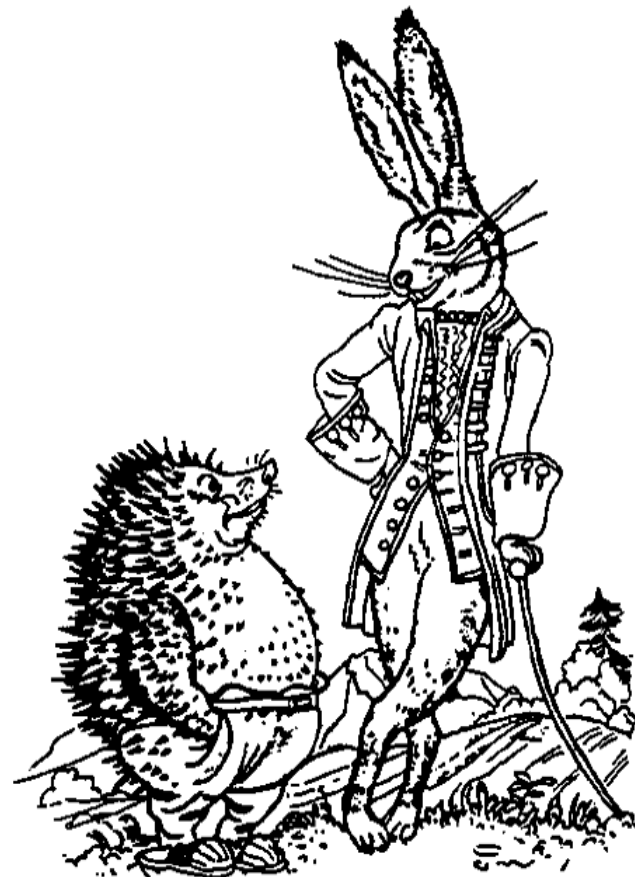
oder

Ununterscheidbarkeit
identischer Teilchen

Terminologie:

identisch=gleichartig

Übereinstimmung in allen
konstanten Eigenschaften



Wikipedia „Ununterscheidbare Teilchen“

„**Ununterscheidbare** (oder **identische**) Teilchen ... sind dadurch gekennzeichnet, dass sie sich in keiner Weise anhand bestimmter, von ihrem jeweiligen Zustand unbeeinflusster Eigenschaften voneinander unterscheiden lassen. Alle fundamentalen Teilchen der gleichen Art sind in diesem Sinne ununterscheidbar (z. B. Elektronen, Photonen, Quarks) ...

Wikipedia „Ununterscheidbare Teilchen“

„**Ununterscheidbare** (oder **identische**) Teilchen ... sind dadurch gekennzeichnet, dass sie sich in keiner Weise anhand bestimmter, von ihrem jeweiligen Zustand unbeeinflusster Eigenschaften voneinander unterscheiden lassen. Alle fundamentalen Teilchen der gleichen Art sind in diesem Sinne ununterscheidbar (z. B. Elektronen, Photonen, Quarks) ...

Die Unmöglichkeit einer Unterscheidung mehrerer identischer Teilchen hat zur Folge, dass die Zuordnung von laufenden Nummern keine Auswirkungen auf experimentelle Ergebnisse hat. Sie würde bei Streuexperimenten zu falschen Voraussagen führen.

Wikipedia „Ununterscheidbare Teilchen“

„**Ununterscheidbare** (oder **identische**) Teilchen ... sind dadurch gekennzeichnet, dass sie sich in keiner Weise anhand bestimmter, von ihrem jeweiligen Zustand unbeeinflusster Eigenschaften voneinander unterscheiden lassen. Alle fundamentalen Teilchen der gleichen Art sind in diesem Sinne ununterscheidbar (z. B. Elektronen, Photonen, Quarks) ...

Die Unmöglichkeit einer Unterscheidung mehrerer identischer Teilchen hat zur Folge, dass die Zuordnung von laufenden Nummern keine Auswirkungen auf experimentelle Ergebnisse hat. Sie würde bei Streuexperimenten zu falschen Voraussagen führen.

Damit widerspricht die Ununterscheidbarkeit identischer Teilchen dem 1663 von Gottfried Wilhelm Leibniz formulierten Prinzip, nach dem es auf der Welt keine zwei Dinge geben könne, die sich in nichts unterscheiden.“

Wikipedia: Gibbssches Paradoxon

„Alle gleichartigen Elementarteilchen und die daraus aufgebauten Atome bzw. Moleküle (sofern sie sich im gleichen Quantenzustand befinden), sind vollkommen identisch und damit ununterscheidbar“

Terminologie:

Ununterscheidbarkeit: spezielle Eigenschaft? oder: Teilchenindizes spielen keine ernsthafte Rolle, Symmetrie, Permutationsinvarianz

Wikipedia: Gibbssches Paradoxon

„Alle gleichartigen Elementarteilchen und die daraus aufgebauten Atome bzw. Moleküle (sofern sie sich im gleichen Quantenzustand befinden), sind vollkommen identisch und damit ununterscheidbar“

Terminologie:

Ununterscheidbarkeit: spezielle Eigenschaft? oder: Teilchenindizes spielen keine ernsthafte Rolle, Symmetrie, Permutationsinvarianz

Fragestellung:

Sind Quantenobjekte *Individuen*, d.h. besitzen sie eine sowohl zeitüberbrückende *diachrone* Identität als auch eine *synchrone* Identität im Sinn ihrer Unterscheidbarkeit von anderen Objekten?

Worin könnte diese Eigenschaft der Ununterscheidbarkeit genau bestehen?

Übersicht

1. Einleitung
2. Physikalische Aspekte I: Quantenstatistik
3. Physikalische Aspekte II: Vielteilchenformalismus und Permutationsinvarianz
4. Leibniz und die Quantentheorie: Verletzt die QTh das PII?
5. Quantenfeldtheorie und Vorstellungen über Mikroobjekte
6. Schlussüberlegungen

Sicht der Philosophie der Physik.

2. Physikalische Aspekte I: Quantenstatistik

Gibbssches Paradoxon

Mischungsentropie gleicher Gase

Kommt man zu einem neuen Fall, wenn zwei gleichartige Teilchen die Plätze tauschen?

Max Planck: Ableitung der Strahlungsformel

Abweichung von Boltzmanns Zählmethode, die zum Wienschen Strahlungsgesetz geführt hätte.

A. Einstein/ S.W. Bose (1924 – 1925) Statistik für

ununterscheidbare Teilchen, Übertragung von Photonen auf Atome und Moleküle.

Noch keine explizite Erwähnung einer Ununterscheidbarkeit.

Dies lässt sich anschaulich illustrieren. Betrachten wir die kombinatorisch möglichen Verteilungen zweier Teilchen a und b auf zwei Zustände, etwa Zustände verschiedener Energie, hier als Boxen dargestellt:

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline ab & \\ \hline \end{array} \\
 (2) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & ab \\ \hline \end{array} \\
 (3) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array} \\
 (4) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline b & a \\ \hline \end{array}
 \end{array} \quad (3.1)$$

Im ersten und zweiten Fall befinden sich beide Teilchen jeweils im gleichen Energiezustand, im dritten und vierten Fall in unterschiedlichen Energien. Die Zählung

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet\bullet & \\ \hline \end{array} \\
 (2) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \bullet\bullet \\ \hline \end{array} \\
 (3) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}
 \end{array} \quad (3.2)$$

Die Notation \bullet deutet an, dass die durch a und b vormalig suggerierte eindeutige Erfassung der beiden Objekte aufgegeben wurde. De facto bedeutet dies, dass die beiden Objekte empirisch ununterscheidbar sind (jedenfalls hinsichtlich der Zählung physikalischer Besetzungsmöglichkeiten).

3. Physikalische Aspekte II: Vielteilchenformalismus und Permutationsinvarianz

Symmetrieeigenschaften von Wellenfunktionen. Gängige Begründung:

Da zwei Situationen, die sich nur dadurch unterscheiden, dass die Zustände m und n statt durch Teilchen 1 und 2 durch Teilchen 2 und 1 besetzt sind, durch Beobachtungen nicht unterscheidbar sind, und da eine physikalische Theorie nur beobachtbare Größen zu berechnen gestatten sollte, müssen beide Fälle durch dieselbe Zustandsfunktion charakterisiert werden.

2 Möglichkeiten:

symmetrisch:
$$\Psi_{nm} = \Psi_m(1) \Psi_n(2) + \Psi_n(1) \Psi_m(2)$$

antisymmetrisch:
$$\Psi_{nm} = \Psi_m(1) \Psi_n(2) - \Psi_n(1) \Psi_m(2)$$

Im antisymmetrischen Fall: ***Pauli-Prinzip***

Dirac: „ ... an antisymmetric eigenfunction vanishes identically when two electrons are in the same orbit ... which is just Pauli's exclusion principle“

symmetrisch:
$$\Psi_{nm} = \Psi_m(1) \Psi_n(2) + \Psi_n(1) \Psi_m(2)$$

antisymmetrisch:
$$\Psi_{nm} = \Psi_m(1) \Psi_n(2) - \Psi_n(1) \Psi_m(2)$$

Neuer Aspekt: keine Individuen

E. Schrödinger vermutet (1925) in den durch die Bose-Einstein-Statistik beschriebenen Objekten „energy excitations states instead of true individuals.“

Symmetrisierungspostulat

Permutationsoperator bei einem Zweiteilchensystem

$$\Psi = \sum_{n,m} c_{n,m} \Psi_m(1) \Psi_n(2)$$

$$\mathbb{P} \Psi = \sum_{n,m} c_{n,m} \Psi_n(1) \Psi_m(2)$$

Ortsdarstellung

$$\mathbb{P} \Psi(x_1, x_2) = \Psi(x_2, x_1)$$

Postulat der Permutationsinvarianz:

Alle empirischen Aussagen sollen invariant sein gegenüber durch \mathbb{P} bewirkte Transformationen der Wellenfunktion

Symmetrisierung und Einteilchenzustände

symmetrisch:
$$\Psi_{nm} = \Psi_m(1) \Psi_n(2) + \Psi_n(1) \Psi_m(2)$$

antisymmetrisch:
$$\Psi_{nm} = \Psi_m(1) \Psi_n(2) - \Psi_n(1) \Psi_m(2)$$

Beide Teilchen sind im gleichen Zustand (gleiche Dichtematrix) und haben gleiche Erwartungswerte für Einteilchenoperatoren.

Auswirkung wird sichtbar z.B. in Streuexperimenten (z.B. Stoß zweier Elektronen)

Postulat der Permutationsinvarianz

Wenn Ψ der Zustand eines aus gleichartigen Teilchen zusammengesetzten Systems ist, dann ändert sich bei keiner Systemobservablen A der Erwartungswert, wenn Ψ durch Permutation der Teilchenindizes in $\mathbb{P}\Psi$ übergeht.

Das Postulat lässt sich auf zwei Weisen erfüllen: durch Einschränkung der zugelassenen Operatoren A oder durch Einschränkung der zugelassenen Zustandsfunktionen Ψ .

„Formale“ Bedeutung der Ununterscheidbarkeit und Konsequenzen für Objektvorstellung

4. Leibniz und die Quantentheorie: Verletzt die QTh das PII?

PII: *principium identitatis indiscernibilium*

Das Prinzip der Identität des Ununterscheidbaren besagt, dass es nicht zwei vollkommen gleiche Dinge geben kann, d. h. keine zwei Dinge, die in allen Eigenschaften übereinstimmen. Zwei Objekte müssen sich, wenn sie nicht ein und dasselbe sind, mindestens in einer Eigenschaft voneinander unterscheiden.

Individuierung durch Eigenschaften

Das PII als Aussage der Prädikatenlogik zweiter Stufe:

$$\forall F (Fx \leftrightarrow Fy) \rightarrow x=y$$

mit der Ununterscheidbarkeit des Identischen

$$x=y \rightarrow \forall F (Fx \leftrightarrow Fy)$$

kann es zur definitorischen Einführung der Identität benutzt werden.
werden.

„Es gibt keine zwei ununterscheidbaren Einzeldinge. Ein mir befreundeter geistvoller Edelmann, mit dem ich mich im Parke von Herrenhausen in Gegenwart Ihrer Hoheit der Kurfürstin unterhielt, meinte, er könne wohl zwei vollkommen ähnliche Blätter finden. Die Kurfürstin bestritt dies, und er gab sich nun lange vergebliche Mühe damit, sie zu suchen. Zwei Tropfen Wasser oder Milch erweisen sich, durch das Mikroskop betrachtet, als unterscheidbar.“

(Leibniz, 4. Brief an Clarke)



Verletzt die QTh das PII?

Unterschiedliche Reaktionen:

Ununterscheidbarkeit? – Zustand (klass. räumliche Eigenschaft)

Verletzen nur Bose Teilchen das PII, Fermi-Teilchen aber nicht?

Wie kann es sein, dass zwei Teilchen, obwohl sie empirisch ununterscheidbar sind, dennoch zwei Teilchen sind?

Unterscheidungen

1. Verletzen Quantenobjekte das Leibniz-Prinzip?
2. Gibt es einen ontologischen Unterschied zwischen Fermionen und Bosonen?
3. In welchem Sinn besteht ein Vielteilchenzustand de facto aus vielen Teilchen (oder muss er nicht vielmehr als ein Ganzes angesehen werden)?
4. In welchem Sinn könnten Quantenobjekte (keine) Individuen sein?

Verletzt die QTh das PII?

Unterscheidungen:

Starkes PII: Es existieren keine zwei Individuen, die nicht absolut unterscheidbar sind, d.h. die nicht in wenigstens einer monadischen (nicht relationalen) Eigenschaft verschieden sind.

Schwaches PII: Es existieren keine zwei Individuen, die nicht schwach unterscheidbar sind, d.h. die nicht hinsichtlich wenigstens einer irreflexiven Relation verschieden sind.

Elektronen verletzen das starke, nicht aber das schwache PII.

(R_{ir} : 1 und 2 haben entgegengesetzten Spin, jedoch nicht zu sich selbst.)

Bosonen sind nach Saunders nicht schwach unterscheidbar.

Was sagt uns das?

Drei Arten der Individuation von Objekten:

- (1) Mengen von Eigenschaften (evtl. sogar Bündel-Theorie)
- (2) Raumzeitliche Bahnen (Lokalisation)
- (3) Primitive (irreduzible) Identität („*haeceitas*“)

: Synchroner Identität: ein bestimmtes Individuum im Unterschied zu anderen Individuen zu sein

Diachrone Identität: Persistenz in der Zeit (u.a. Frage der Wiedererkennbarkeit)

Verletzt die QTh das PII?

Landau/ Lifschitz, 1979, Bd. 3, S. 218:

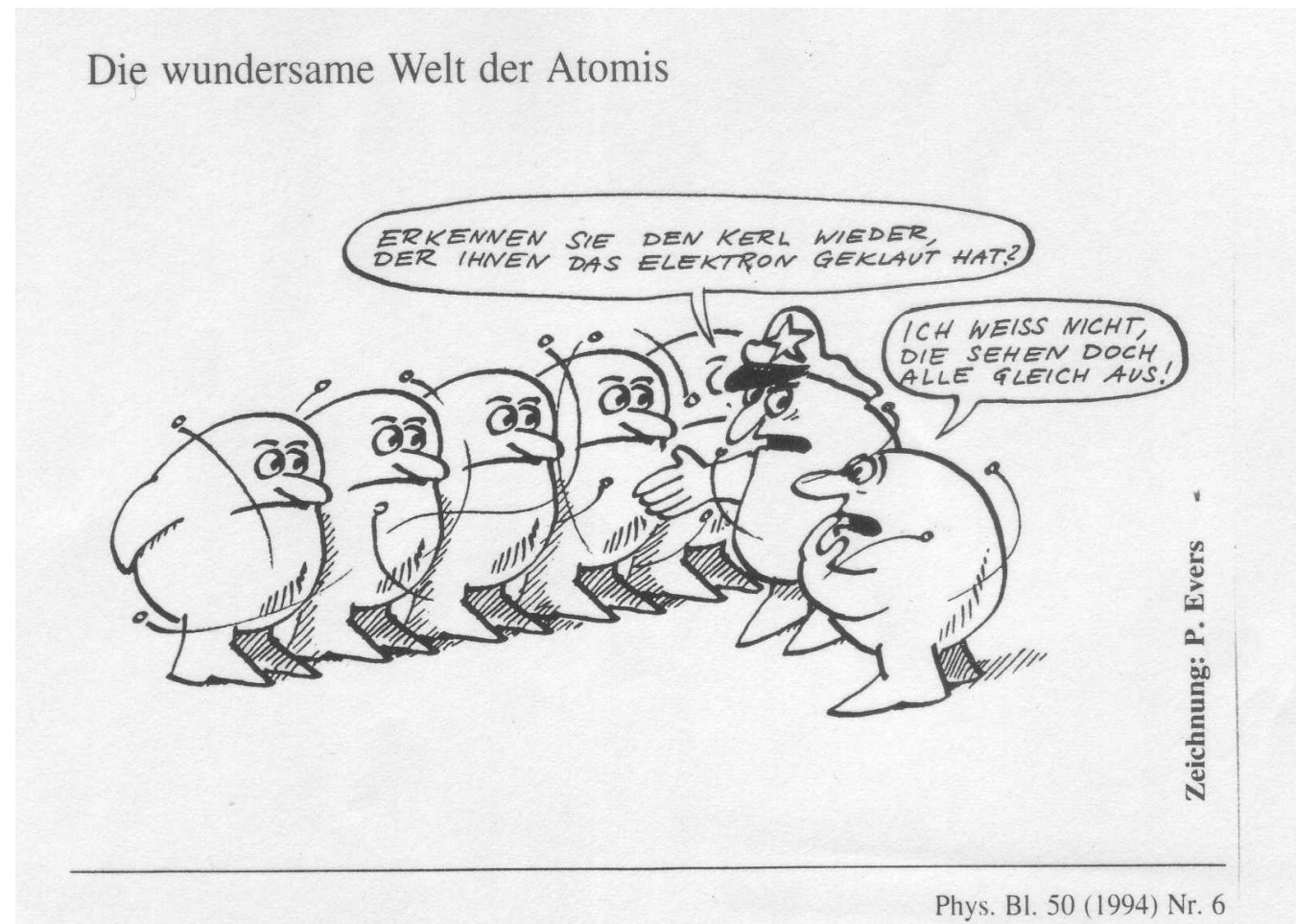
“Wir haben bereits mehrfach darauf hingewiesen, dass der Begriff der Bahnkurve eines Elektrons wegen des Unbestimmtheitsprinzips seinen Sinn vollkommen verliert ... Wenn wir eines der Elektronen in einem anderen Zeitpunkt an einer Stelle des Raumes lokalisieren, dann können wir nicht angeben, welches der Elektronen an diesen Punkt gelangt ist.

In der Quantenmechanik gibt es also prinzipiell keine Möglichkeit, ein einzelnes von gleichartigen Teilchen gesondert zu verfolgen und damit die Teilchen zu unterscheiden. Man kann sagen, dass gleichartige Teilchen ihre „Individualität“ in der Quantenmechanik vollkommen verlieren.“

Wiedererkennbarkeit

Weyl 1928 „Von Elektronen kann man prinzipiell nicht den Nachweis ihres Alibis verlangen. So setzt sich in der modernen Quantentheorie das Leibnizsche Princip von der coincidentia indiscernibilium durch.“

“



5. Quantenfeldtheorie und Vorstellungen über Mikroobjekte

Was wird nummeriert?

Es gibt Formulierungen der Quantentheorie (Besetzungszahldarstellung), in der Indizes für Teilchen überhaupt nicht mehr vorkommen.

Solche indexfreien („unlabelled“) Darstellungen tragen den Symmetrisierungsforderungen automatisch Rechnung.

Vielteilchenformalismus und Quantenfeldtheorie

N-dimensionaler Hilbertraum als Tensorprodukt von Einteilchen-Hilberträumen

$$\mathcal{H}^n = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i.$$

Möglicher Basiszustand

$$\psi = \psi(1, 2, 3, \dots, n) = \psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \dots \otimes \psi_n, \quad \psi_i \in \mathcal{H}_i.$$

Wirkung des Projektionsoperators P_{ik} auf die Basis:

Dem Einteilchenzustand im Faktorraum i wird der Einteilchenzustand im Faktorraum k zugeordnet (und umgekehrt)

Indizes von Faktorräumen, nicht von Teilchen.

Äquivalenz des Vielteilchenformalismus und der Feldquantisierung

Im Falle der QFT wird das ausgezeichnete Basissystem durch Feldoperatoren aus dem Vakuumvektor erzeugt.

Durch die Vertauschungsrelationen der Feldoperatoren (also durch den Theoriekern) ist damit die Symmetrie- und die Antisymmetrieforderung automatisch erfüllt (ohne Bezugnahme auf Ununterscheidbarkeit).

Feldquantisierung, Fockraum und Quanta

Zustandsbeschreibung in Besetzungszahldarstellung

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{f(\omega_p)} \left[a(\mathbf{p}) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right]$$

Quantisierungsvorschrift: Feldgröße und konjugiertes Feld (Feldimpuls) werden zu Operatoren, die Vertauschungsbeziehungen erfüllen.

Daraus folgen Kommutator (Antikommutator-) Beziehungen für $a(\mathbf{p})$ und $a^+(\mathbf{p})$

$$[a(\mathbf{p}), a^+(\mathbf{p}')] = f \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

Zustandsbeschreibung in Besetzungszahldarstellung

*Analogie: Leiteroperatoren*Besetzungszahloperator $N(p)$ Erzeugungsoperator $a^+(p)$, Vernichtungsoperator $a(p)$

$$N(p) = a^+(p) a(p) \quad \text{ganzzahlige Eigenwerte}$$

$$a^+(p) |0\rangle = |1\rangle$$

$$a(p) |1\rangle = |0\rangle$$

$$a^+(p) |1\rangle = |2\rangle$$

Im Falle der QFT wird das ausgezeichnete Basissystem durch Feldoperatoren aus dem Vakuumvektor erzeugt.

Keine Teilchenindizes.

Durch die Vertauschungsrelationen der Feldoperatoren (also durch den Theoriekern) ist damit die Symmetrie und die Antisymmetrieforderung automatisch erfüllt (ohne Bezugnahme auf Ununterscheidbarkeit).

Auch Begründung der Quantenstatistik ist so möglich, keine Berufung auf Ununterscheidbarkeit nötig.

Symmetrieforderung schränkt zugängliche Zustandsräume ein.

Durch die zweifache Anwendung eines Erzeugungsoperators werden nach einem dazu passenden Bild nicht zwei Teilchen im gleichen Zustand erzeugt, sondern ein Schwingungszustand wird um zwei Einheiten höher angeregt.

Das ist nun so weit von dem Hintergrund der Leibnizschen Vorstellungen entfernt, dass man nicht mehr von einer Verletzung des PII sprechen sollte: Es ist einfach nicht mehr zu sehen, wie das Leibnizsche Prinzip überhaupt ins Spiel kommen sollte.

QFT ist nicht in der Sprache der Prädikatenlogik formuliert.

Die klassische Konzeption von Individuen als Trägern von Eigenschaften, die bei der Formulierung des PII vorausgesetzt ist, hat in der Mikrowelt ihre durchgehende Anwendbarkeit verloren.

Es bleibt offen, ob und wie Quantenobjekte, für die man ein Leibniz-Prinzip formulieren könnte, im Formalismus der QFT vorkommen.

Auch sog. Quanta (Teller), deren Existenz durch Besetzungszahldarstellung nahe gelegt wird, erfüllen diese Rolle nicht, z.B. ist ihre Lokalisierung unklar.

Die Redeweise, dass ein bestimmter Zustand n -fach besetzt wird, sagt etwas über die Eigenwerte von Eigenzuständen des Teilchenzahloperators aus, klärt aber nicht, was diesen Zustand mehrfach „besetzt“ und ob die Suche danach überhaupt sinnvoll ist.

Teilcheninterpretation sehr problematisch:

Superpositionen führen zu Zuständen mit nicht definierter Teilchenzahl. Probleme mit lokalisierten Zuständen in rel. QFT (Malament).

Fockraum-Darstellung nur für freie Theorie (ohne Wechselwirkung).

Äquivalenz des Vielteilchenformalismus im Konfigurationsraum mit Schrödingerschen Wellenfunktionen und der **Feldquantisierung** im Hilbertraum der Zustandsvektoren (*Dirac 1927*).

(Analogie: Ortsdarstellung)

Fockraum-Formalismus ist äquivalent zum indizierten Tensorprodukt-Mehrteilchenformalismus.

Welcher Formalismus ist ontologisch (für die Objektvorstellung) relevant?

Voraussetzung: Physik ist für Metaphysik wichtig.

Klassischer Objektbegriff

Klassische Grenzgelung: Schwieriges Problem!

Z. T. Überlegungen im Einzelfall:

Z. B. Streuquerschnitt: Interferenzterme durch Symmetrisierung fallen bei Mittelung weg.

Teilchenspuren. Folgen von Messereignissen.

6. Schlussüberlegungen

Elementarteilchen sind keine Teilchen im klassischen Sinn. Insbesondere verfolgen sie keine kontinuierlichen raumzeitlichen Bahnen. Deswegen ist die Voraussetzung der Individuierbarkeit durch ihre Bahn nicht mehr durchgehend gegeben.

Gefährliche Sprechweise: Elementarteilchen sind nicht nummerierbar, aber zählbar. Vieldeutigkeit von „Quant“.

Nur unter bestimmten Umständen entstehen Konfigurationen , bei denen man die Frage nach der Ununterscheidbarkeit überhaupt sinnvoll stellen kann.

Bild vielleicht eher: Ansammlung von Oszillatoren (die man sich aber nicht als lokalisiert vorstellen darf). Diese Oszillatoren können zu verschiedenen Schwingungszuständen angeregt werden. Die sogenannten Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren beschreiben dann eher Übergänge zwischen Anregungszuständen als die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen.

Wenn man sagt, dass 7 Photonen den gleichen Zustand besetzen, dann kann man (sofern man die Quantenfeldtheorie ernst nimmt) damit nicht meinen, dass es sich dabei um 7 Individuen handelt, die in allen Eigenschaften übereinstimmen.

Zugang:

Gegenwärtige Philosophie der Physik (Metaphysik der Quantentheorie)

Startpunkt: Mathematischer Apparat der Quantenfeldtheorie

(und einige Experimente)

Zentrum: Einschränkung des Zustandsraums auf symmetrische und antisymmetrische Zustände (Permutationsinvarianz)

Raum-Zeit-Interpretation?

Anschaulichkeit?

Elektronen und Photonen sind keine Individuen, die man benennen und identifizieren kann.

Die Rede von der besonderen Eigenschaft der Ununterscheidbarkeit, die Elementarteilchen haben, ist ein Versuch, sich mit Hilfe des klassischen Teilchenbildes das Verhalten der Mikroobjekte verständlich zu machen.

Philosophisch können daraus keine besonderen ontologischen Konsequenzen gezogen werden.

Konsequenzen für die Physikdidaktik?

Literatur

Cord Friebe (et al.): *Philosophie der Quantenphysik*, 2. Aufl., erscheint Heidelberg 2017 (Springer Lehrbuch), insbes. Kap. 3 (H. Lyre) und Kap. 4 (M. Kuhlmann, M. Stöckler)

Artikel in der Stanford Encyclopedia of Philosophy, speziell: S. French: *Identity and individuality in quantum theory* (2015)
<https://plato.stanford.edu/entries/qt-idind/>

Kastler, A. (1983): *On the historical development of the indistinguishability concept for microparticles*, in : A. van der Merwe (ed.), *Old and new questions in physics, cosmology, philosophy, and theoretical biology*, New York 1983, S. 607-623

Dirac, P.A.M., *On the theory of quantum mechanics*, Proceedings of the Royal Society (London) A 123 (1929), S. 714-733

Stöckler, M.: *Individualität, Identität, Ununterscheidbarkeit. Überlegungen zum Gegenstandsbegriff in der Quantenfeldtheorie*, *Conceptus XXII* (1988), Nr. 57, S. 5-29